

Semaine 8:
Magnétostatique 2

Dipôle magnétiques des atomes et des molécules

Les moments de dipôle magnétiques des atomes et des molécules dérivent de:

- 1) le moment angulaire orbital des électrons
- 2) le moment angulaire intrinsèque (de spin) des électrons, des protons et des neutrons.

Formellement:

Moment de dipole magnetique orbitale

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k)$$

$$\mathbf{L}_k \equiv m_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k) \quad (\text{moment angulaire orbitale de la particule } k)$$

$$\Rightarrow \mathbf{m}_L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{m_k} \mathbf{L}_k$$

Si toutes les particules ont le même rapport charge sur masse:

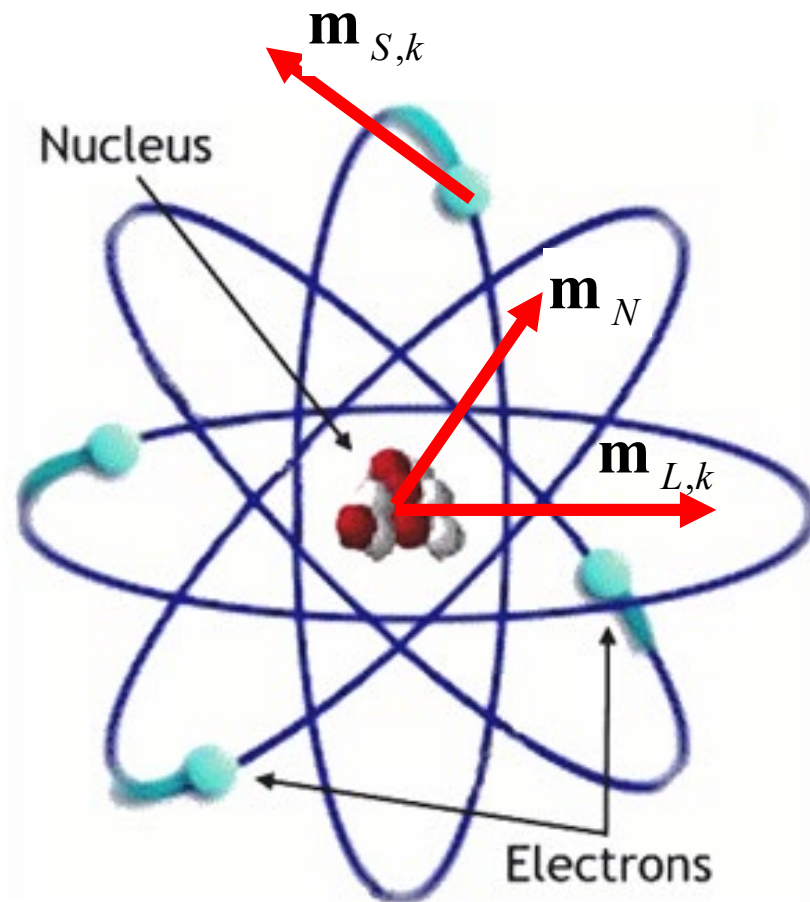
$$\mathbf{m}_L = \frac{q}{2m} \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_k = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad (\mathbf{L} = \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_k \text{ est le moment angulaire orbitale totale})$$

Moment de dipole magnetique intrisique (ou spin)

Aucune "analogie de physique classique" précise:

$$\mathbf{m}_S = g \frac{q}{2m} \mathbf{S} \quad (\mathbf{S} \text{ moment angulaire de spin})$$

Dipôle magnétique de l'atome



$\mathbf{m}_{L,k}$: Moment magnétique orbital de l'électron k

$\mathbf{m}_{S,k}$: Moment magnétique intrinsèque de l'électron k

$\mathbf{m}_N$: Moment magnétique du noyau

$$\mathbf{m}_{S,k} \cong \mathbf{m}_{L,k} \quad \mathbf{m}_N \ll \mathbf{m}_{S,k}, \mathbf{m}_{L,k}$$

Moment magnétique total de l'atome i $\mathbf{m}_i$:

$$|\mathbf{m}_i| \cong \alpha \mu_B \quad \alpha \in [0, 10]$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \cong 9.24 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$$

Note:

"courant atomique équivalente"

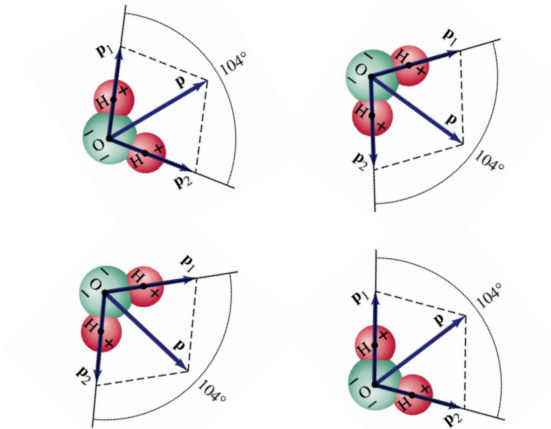
$$I \approx \frac{\mu_B}{S} \approx \frac{10^{-23} \text{ Am}^2}{10^{-20} \text{ m}^2} = 10^{-3} \text{ A}$$

"vitesse équivalente"

$$v \approx \frac{2\pi RI}{e} \approx \frac{10^{-9} \text{ m} \times 10^{-3} \text{ A}}{10^{-19} \text{ C}} \approx 10^7 \text{ m/s}$$

Matériaux «diélectriques»:

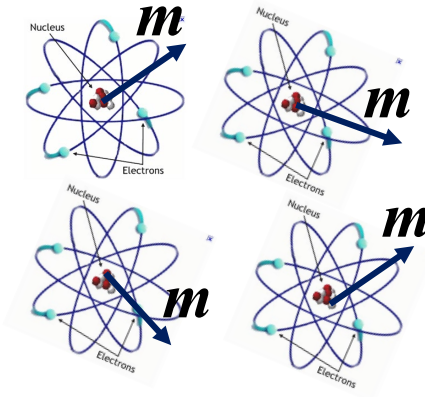
composés de **dipôles électriques** microscopiques
(induits par $\mathbf{E}$ ou permanents)



Dimensions
d'un atome ou
d'une molécule

Matériaux «magnétiques»:

composés de **dipôles magnétiques** microscopiques
(induits par $\mathbf{B}$ ou permanentes)

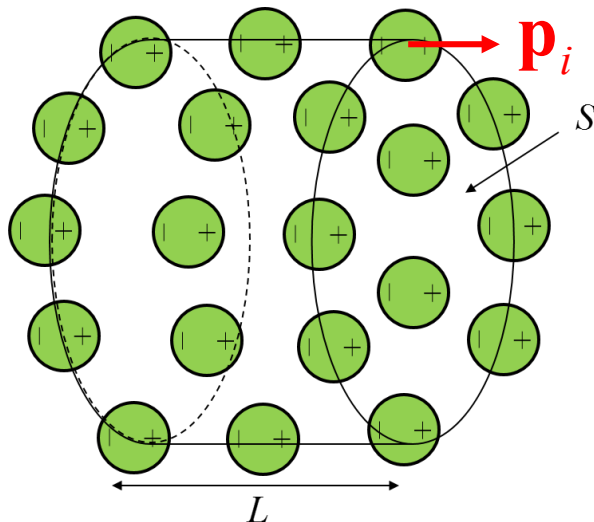


Polarisation: le vecteur $\mathbf{P}$

Polarisation:
moment électrique dipolaire
par unité de volume

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{LS}$$

$$[\mathbf{p}_i] = \text{Cm}; \quad [\mathbf{P}] = \text{C/m}^2$$

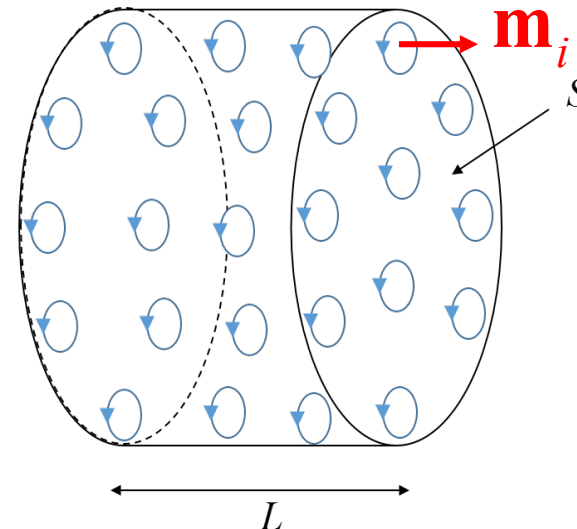


Aimantation: le vecteur $\mathbf{M}$

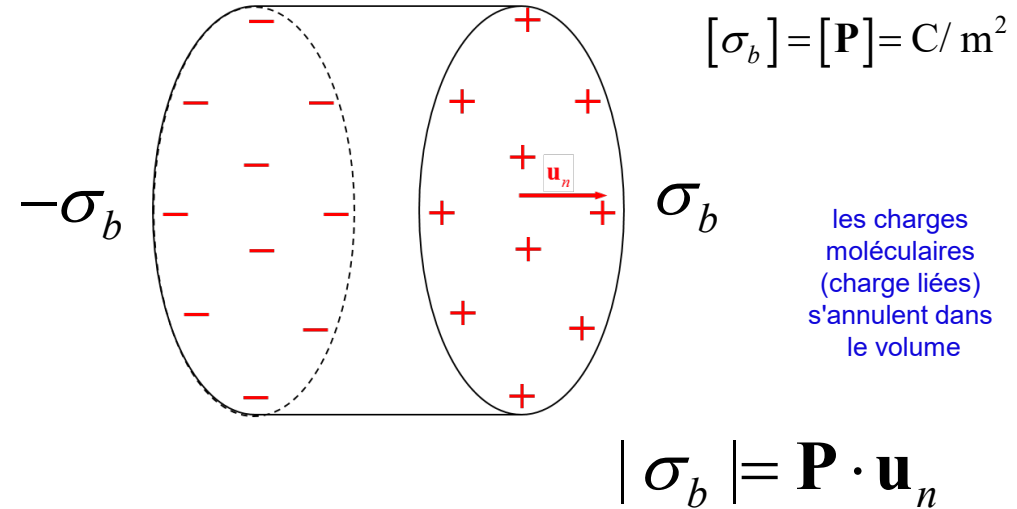
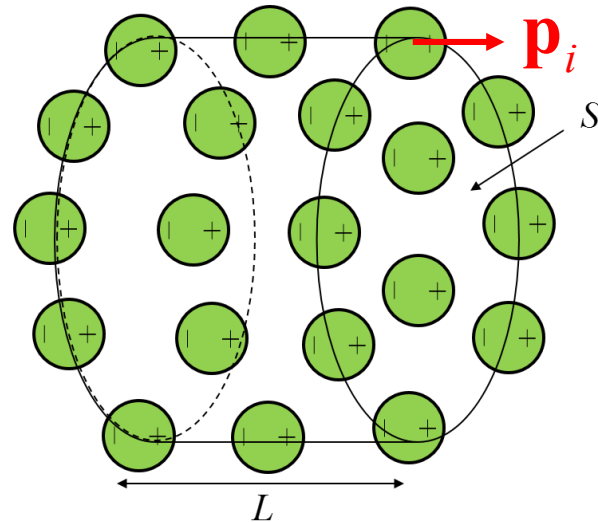
Aimantation:
moment magnétique dipolaire
par unité de volume

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{LS}$$

$$[\mathbf{m}_i] = \text{Am}^2; \quad [\mathbf{M}] = \text{Am}^{-1}$$

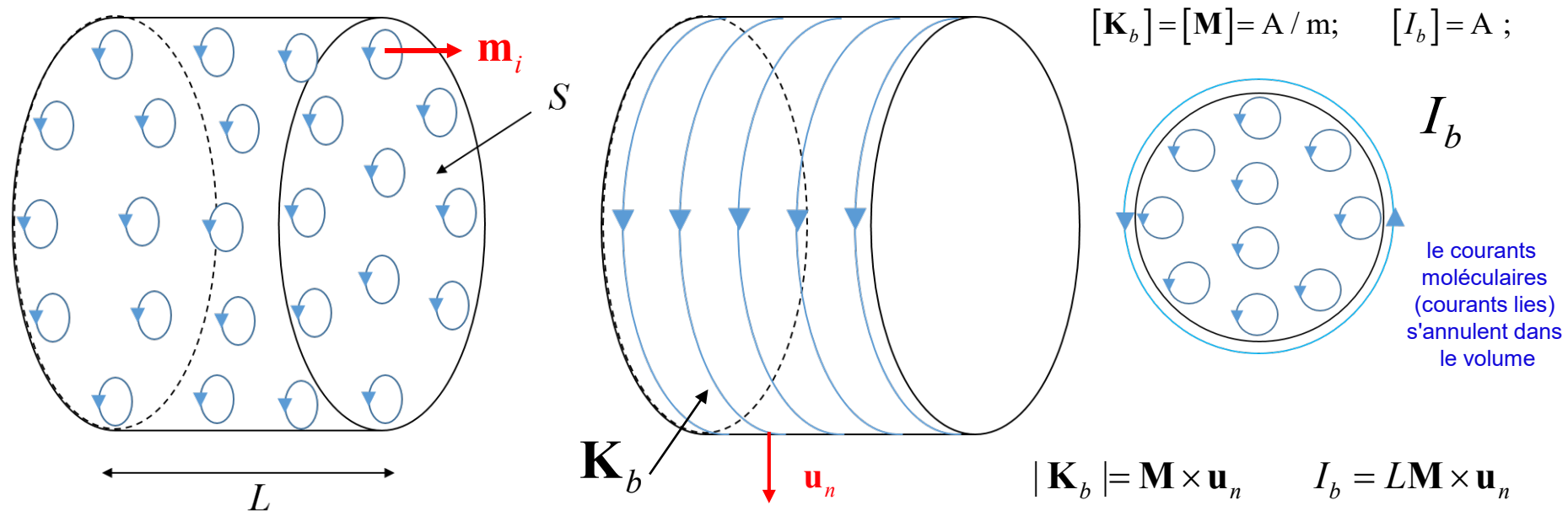


«Modèle équivalent» avec «charges liées de surface»:



Densité de surface des charges "liées" (bound): $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$

«Modèle équivalent» avec «courants liés de surface»:



Densité de surface des courants "liés" (bound): $|\mathbf{K}_b| = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n$

Susceptibilité et Perméabilité

Analogie Electrique Magnétique

Toujours valable: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

Matériau linéaire: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

χ_e : susceptibilité électrique

ϵ_r : permittivité électrique relative
(constante diélectrique relative)

Toujours valable: $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$

Matériau linéaire: $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

χ_m : susceptibilité magnétique

μ_r : perméabilité magnétique relative

Types de magnétisme

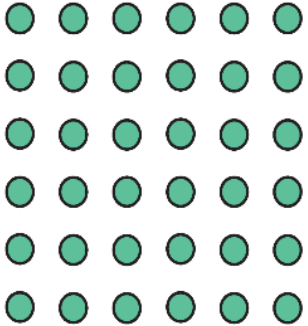
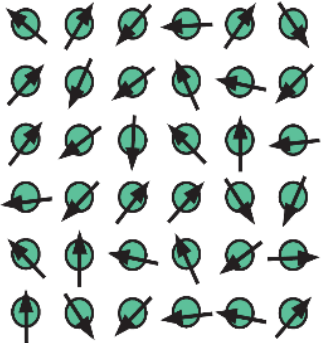
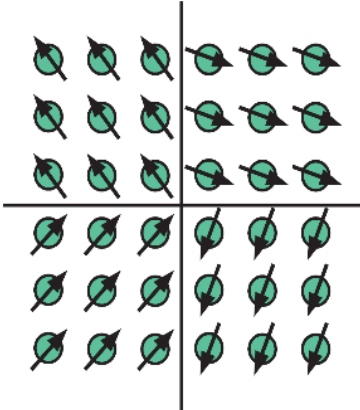
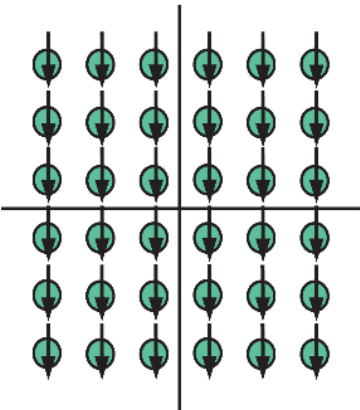
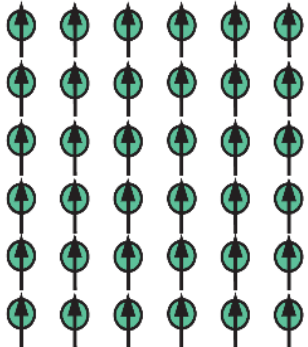
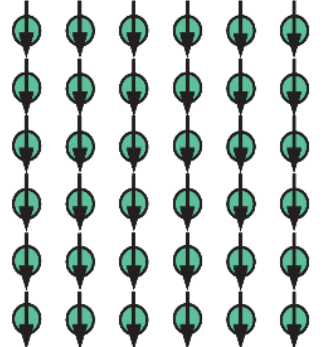
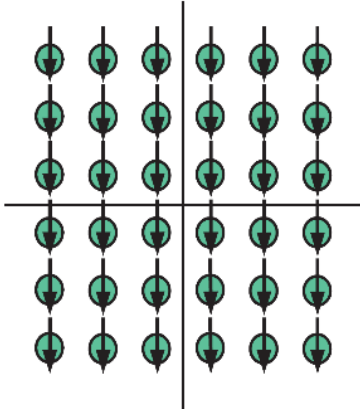
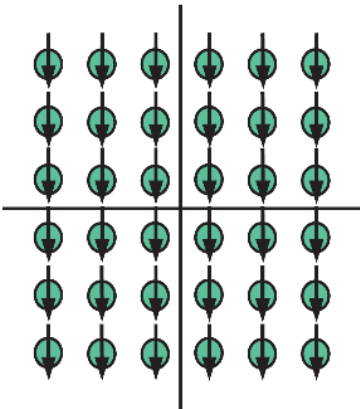
$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

χ_m : Susceptibilité magnétique

Type	Valeurs typiques	Origine physique
Diamagnétisme	$\chi_m \approx -10^{-6}$	Dipôles magnétiques «induits» non couplés
Paramagnétisme	$\chi_m \approx +(10^{-5} \div 10^{-3})$	Dipôles magnétiques «permanents» non couplés
Ferromagnétisme	$\chi_m \approx +(0 \div 10^6)$	Dipôles magnétiques «permanents» couplés

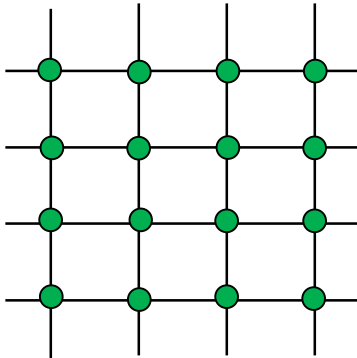
Susceptibilité magnétique
(à T=293 K, 1 atm)

Material	Susceptibility	Material	Susceptibility
<i>Diamagnetic:</i>		<i>Paramagnetic:</i>	
Bismuth	-1.7×10^{-4}	Oxygen (O ₂)	1.7×10^{-6}
Gold	-3.4×10^{-5}	Sodium	8.5×10^{-6}
Silver	-2.4×10^{-5}	Aluminum	2.2×10^{-5}
Copper	-9.7×10^{-6}	Tungsten	7.0×10^{-5}
Water	-9.0×10^{-6}	Platinum	2.7×10^{-4}
Carbon Dioxide	-1.1×10^{-8}	Liquid Oxygen (−200° C)	3.9×10^{-3}
Hydrogen (H ₂)	-2.1×10^{-9}	Gadolinium	4.8×10^{-1}

	DIAMAGNETIC	PARAMAGNETIC	FERROMAGNETIC SOFT (IDEAL)	FERROMAGNETIC HARD (IDEAL)
$B = 0$				
$\mathbf{B} \downarrow$ $mB \gg kT$				

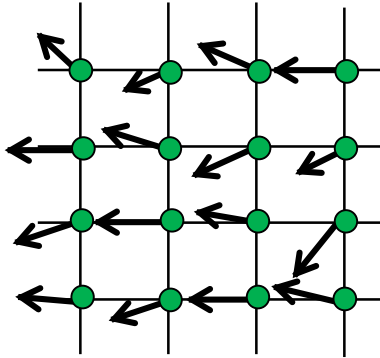
Diamagnétisme et Paramagnétisme

$$\mathbf{B} = 0$$



$$\mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{B} \neq 0$$

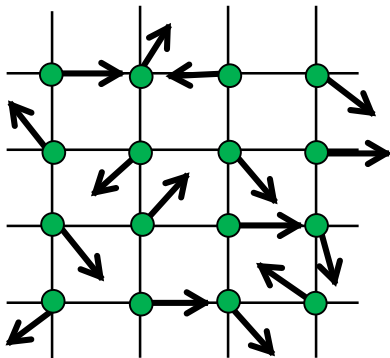


$$\mathbf{M} \neq 0$$

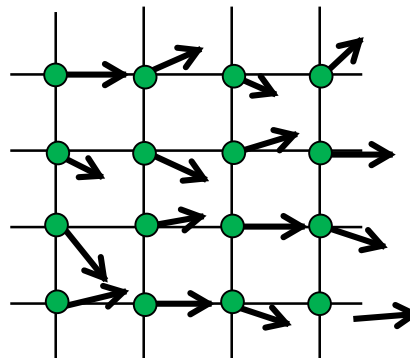
Atomes

Diamagnétiques

- Atome sans dipôle magnétique «permanent».
- ← ● Atome avec dipôle magnétique «induit»



$$\mathbf{M} = 0$$



$$\mathbf{M} \neq 0$$

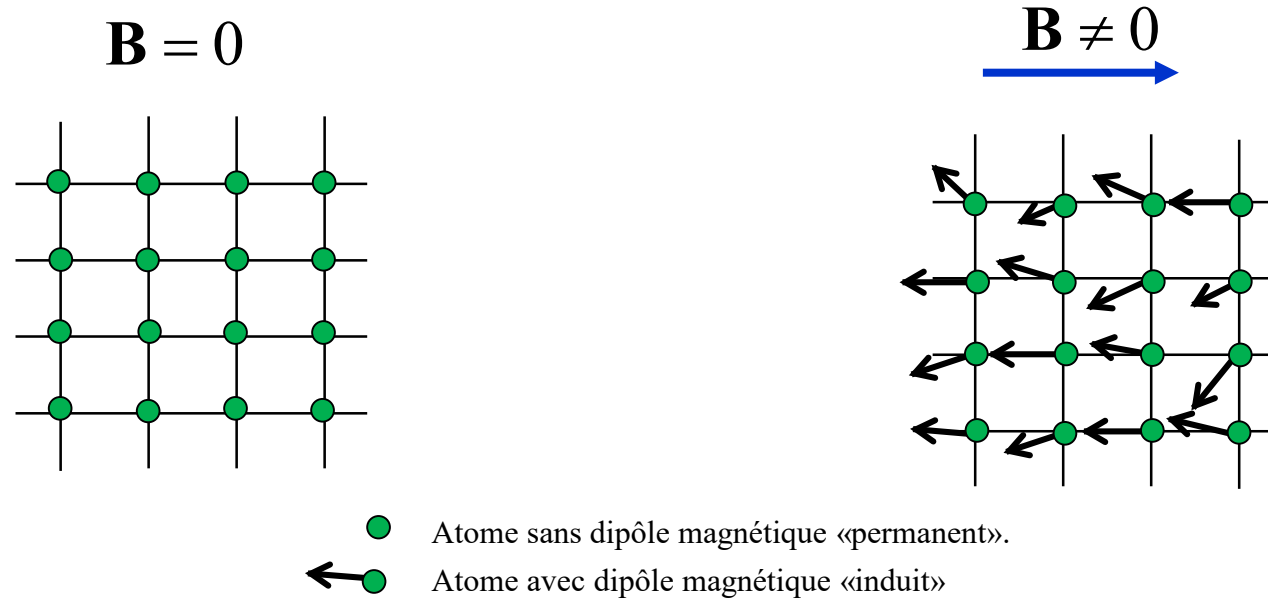
Atomes

Paramagnétiques

- ← ● Atome avec dipôle magnétique «permanent».

Diamagnetisme

Dipôles magnétiques «induits» non couplés



$$\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{m}_i = 0, \mathbf{M} = 0$$

$\mathbf{B} \neq 0 \Rightarrow$ le champ magnétique induit un moment magnétique sur les atomes, par "distorsions" (force de Lorentz) du mouvement des électrons dans les orbitales atomiques, résultant en une aimantation $\mathbf{M}$ antiparallèle à $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{M} // -\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{M} \equiv \chi_m \mathbf{H} \quad \text{with} \quad \chi < 0$$

Note:

On peut montrer que, pour un matériau diamagnétique:

$$\mathbf{M} = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e} \left(\sum_i r_i^2 \right)_{\text{moy}} \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \chi_m = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e} \left(\sum_i r_i^2 \right)_{\text{moy}}$$

n : nombre d'atomes par unité de volume [m^{-3}]

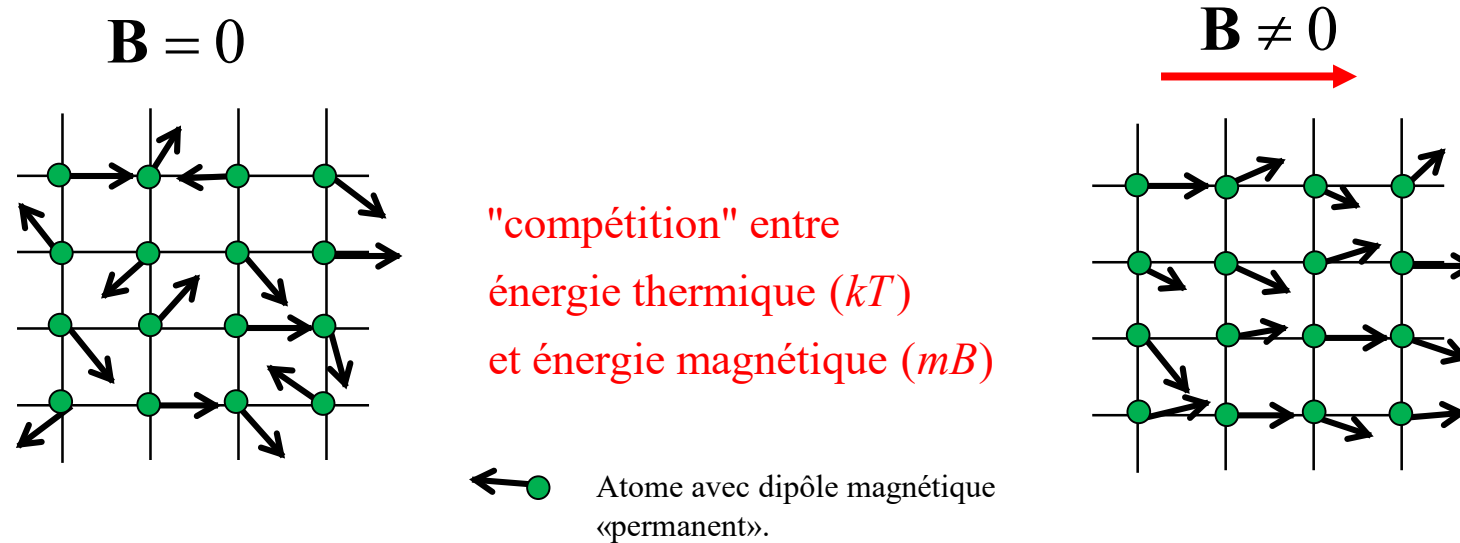
r_i : distance du $i^{\text{ème}}$ électron au noyau de l'atome [m]

m_e : masse de l'électron [kg]

e : charge de l'électron [C]

Paramagnétisme

Dipôles magnétiques «permanents» non couplés



$$\mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{m}_i \neq 0, \mathbf{M} = 0$$

$\mathbf{B} \neq 0 \Rightarrow$ Un champ magnétique exerce une couple $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$ qui tend à aligner les dipôles magnétiques le long du champ $\mathbf{B}$ (le système a tendance à minimiser l'énergie potentielle magnétique $U_B = - \sum_i \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{B}$),

Les mouvements moléculaire aléatoires dûs à la température tendent à contrebalancer l'effet d'alignement dû au champ magnétique.

(l'énergie thermique ($U_{th} \cong kT$) tend à orienter les moments magnétiques de façon aléatoire).

Le résultat finale est:

$$\mathbf{M} // \mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{M} \equiv \chi_m \mathbf{H} \quad \text{with} \quad \chi_m > 0$$

Note.

On peut montrer que, pour un matériau paramagnétique:

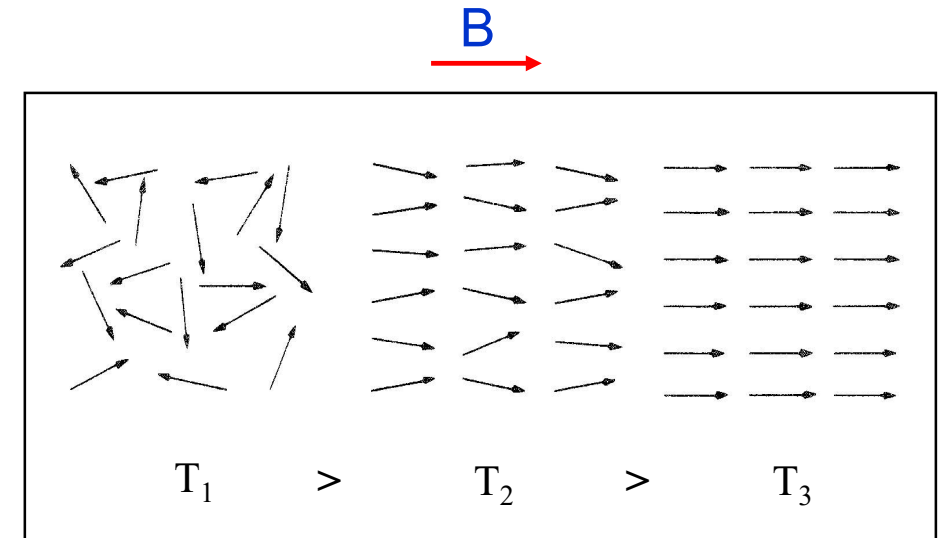
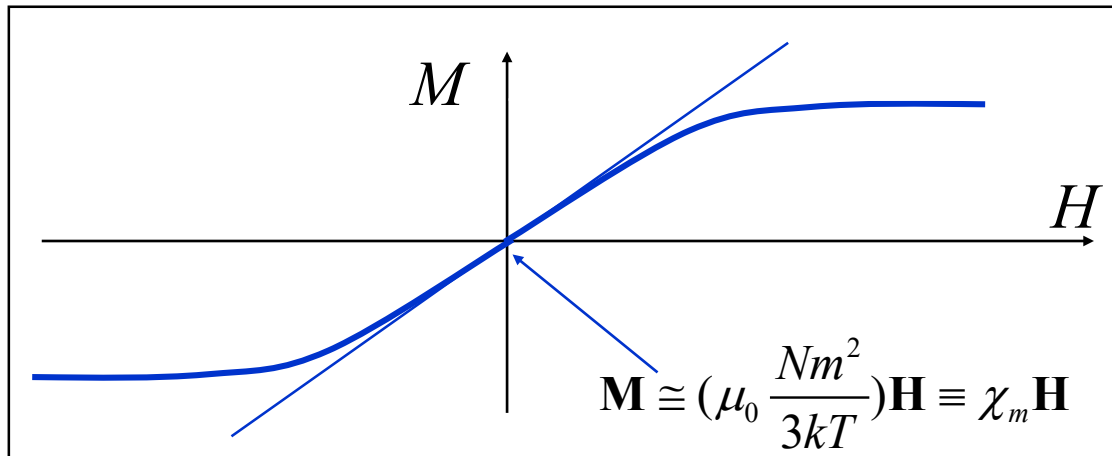
$$\mathbf{M} = Nm \left[\coth\left(\frac{\mu_0 m H}{kT}\right) - \frac{kT}{\mu_0 m H} \right] \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$$

$$\text{Pour } \frac{\mu_0 m H}{kT} \ll 1 \Rightarrow \mathbf{M} \cong \frac{Nm^2 \mu_0 \mathbf{H}}{3kT} \Rightarrow \chi_m = \frac{Nm^2 \mu_0}{3kT}$$

$$\text{Pour } x \ll 1: \coth(x) - \frac{1}{x} \cong \frac{1}{3}x$$

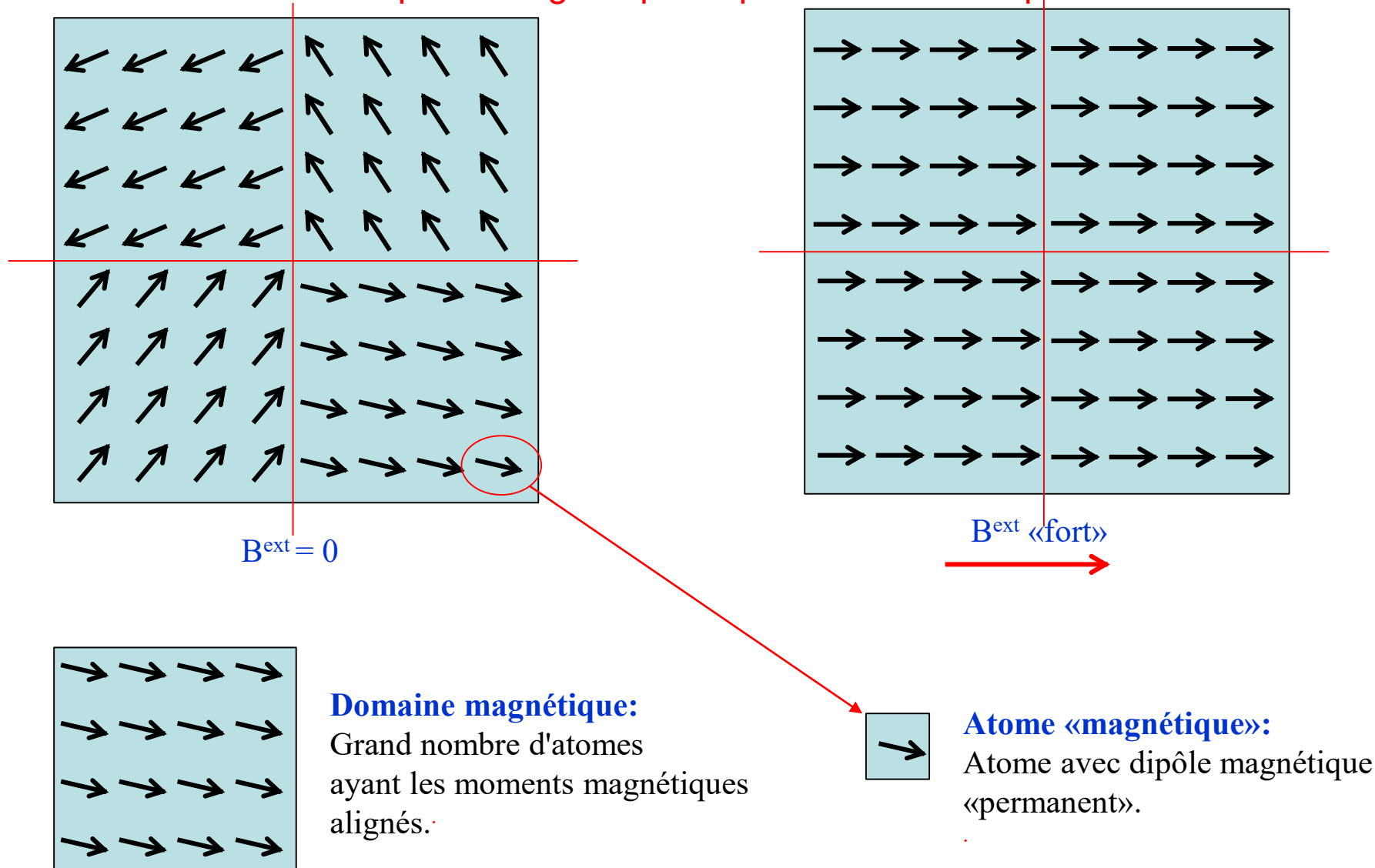
Loi de Curie

$$\frac{\mu_0 m H}{kT} \gg 1 \Rightarrow \mathbf{M} \cong Nm$$

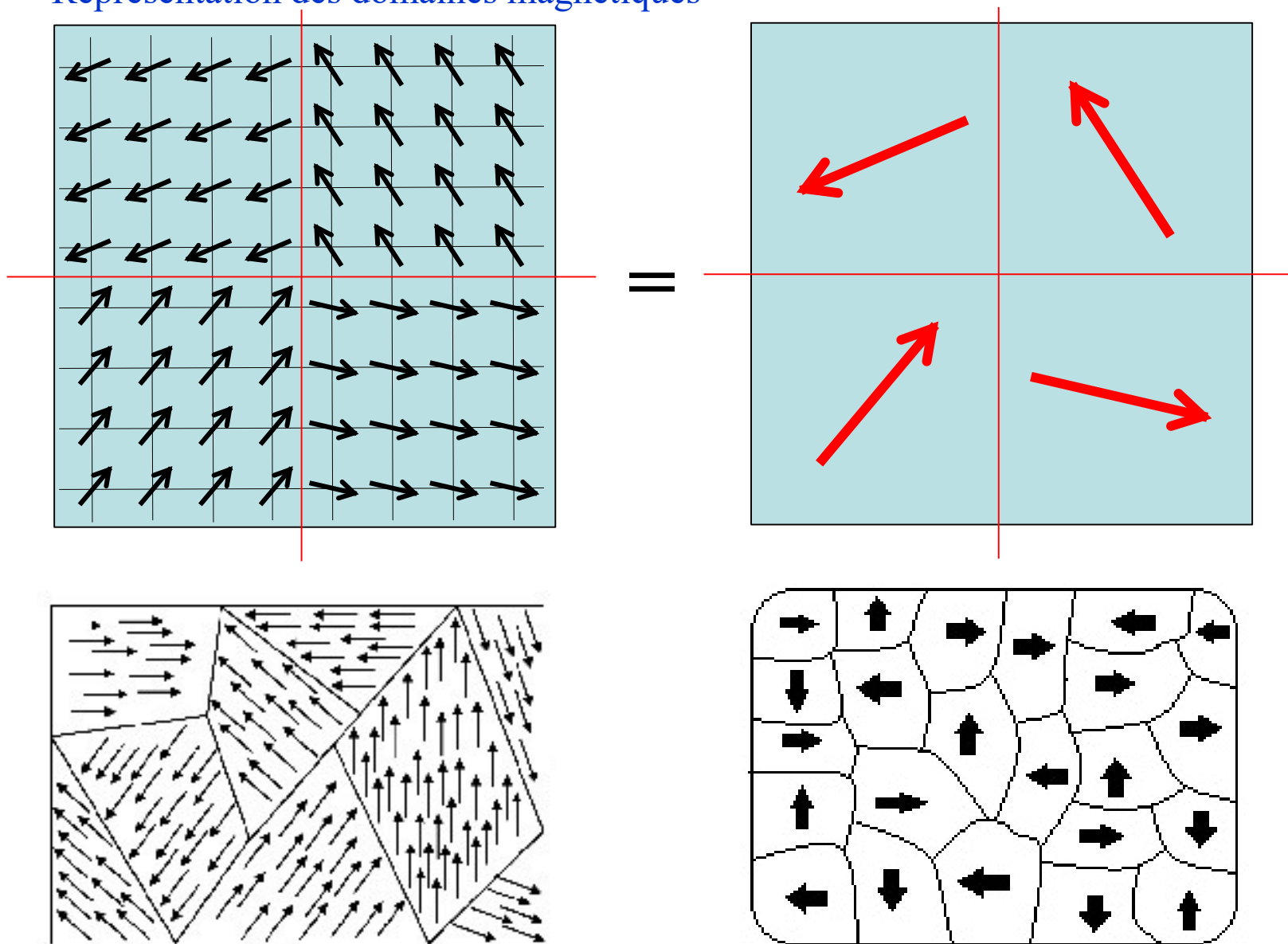


Ferromagnétisme

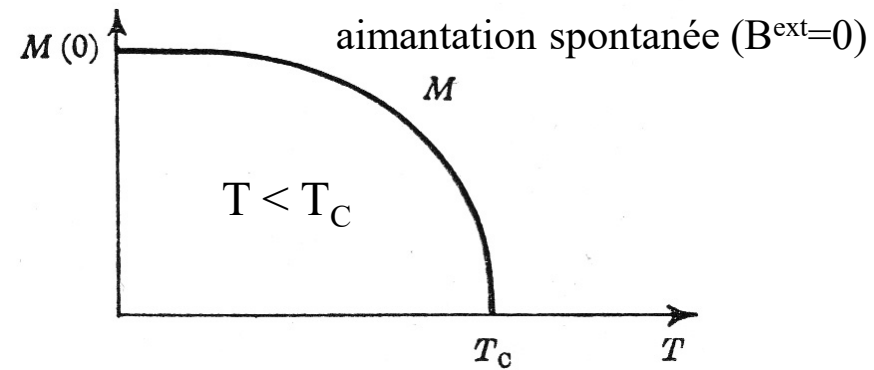
Dipôles magnétiques «permanents» couplés



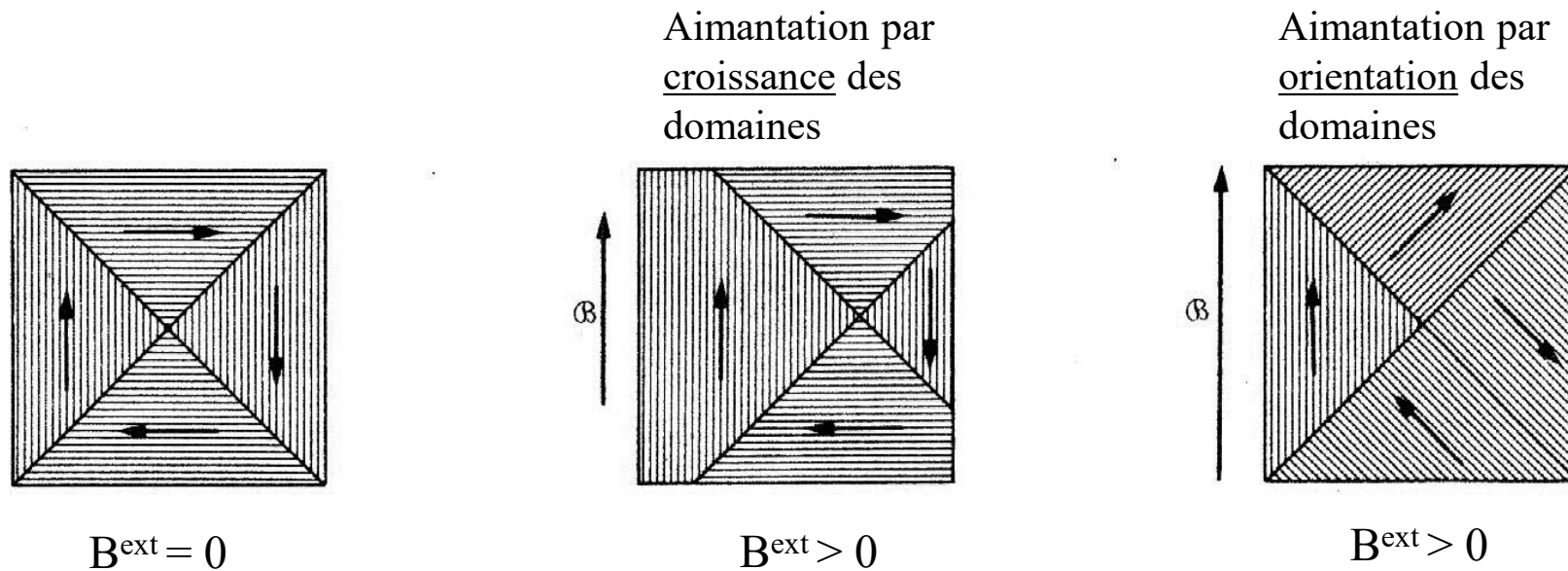
Représentation des domaines magnétiques



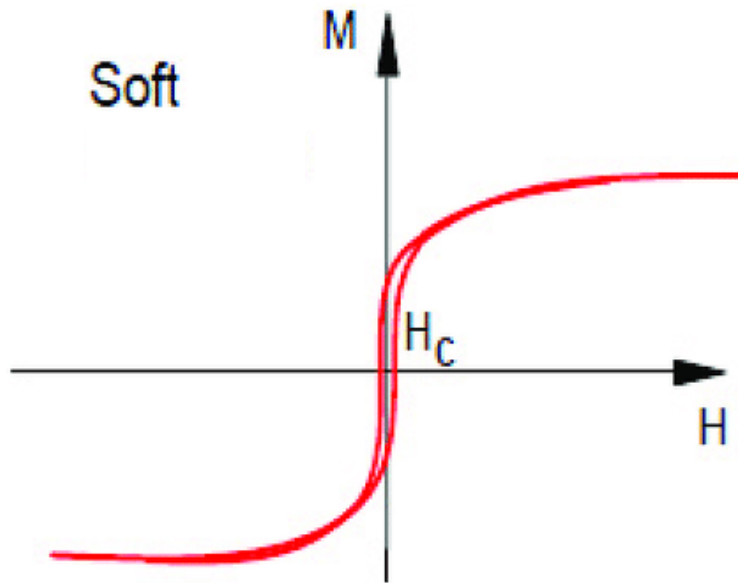
Aimantation dans les domaines magnétiques vs température:



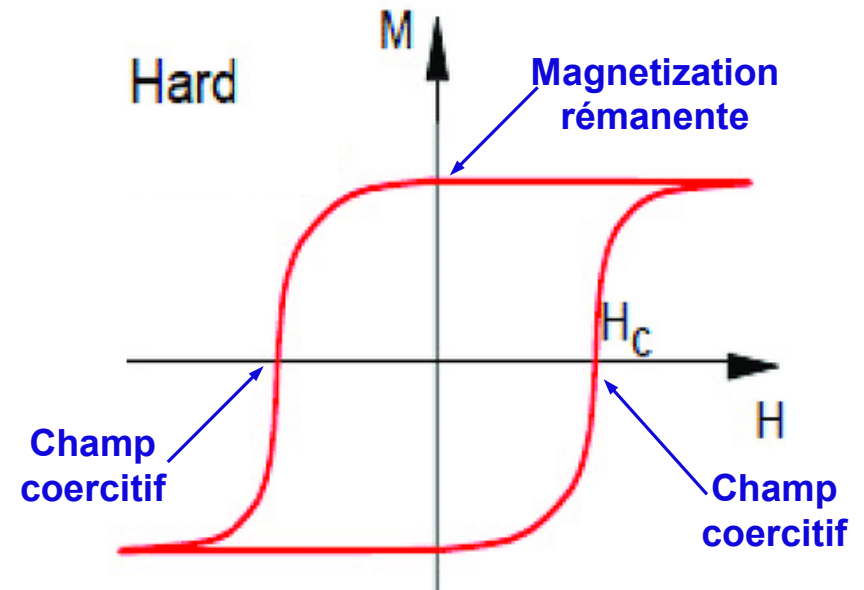
Aimantation dans les domaines magnétiques vs champs magnétique:



Soft and hard ferromagnetic materials



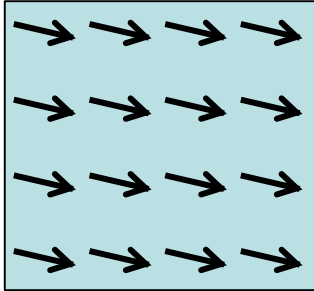
Magnétisation rémanente: très faible
Hystérésis: très faible
Champ coercitif: très faible



Magnétisation rémanente : très grande
Hystérésis: très grande
Champ coercitif: très grande

Ferromagnétique, Antiferromagnétique, Ferrimagnétique

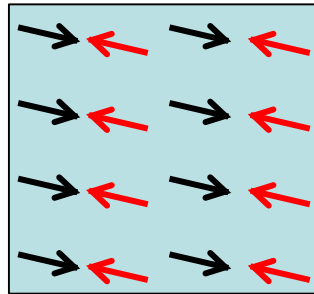
Domaine magnétique



Ferromagnétique:

Les moments magnétiques des tous les atomes sont parallèles.

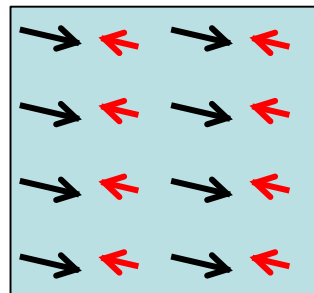
$$\mathbf{M} \neq 0$$



Antiferromagnétique:

Les moments magnétiques des atomes sont tous de même amplitude mais sont antiparallèles.

$$\mathbf{M} = 0$$

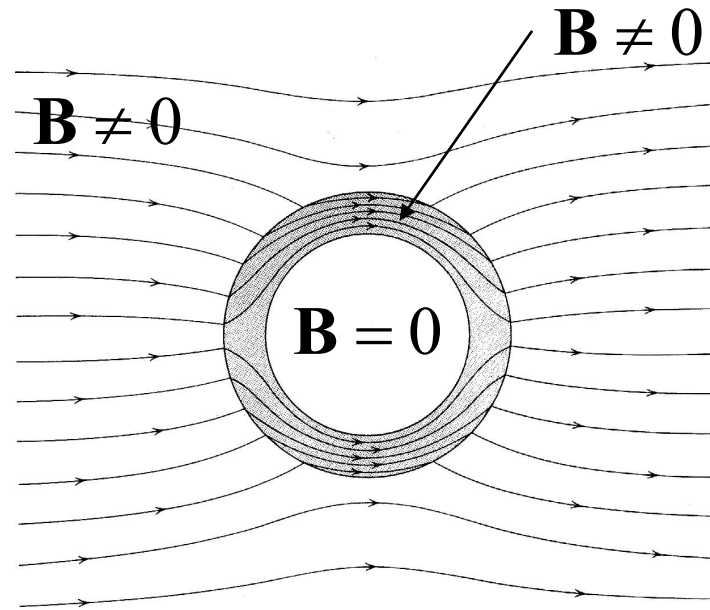


Ferrimagnétique:

Les moments magnétiques des atomes sont d'amplitude différentes et sont antiparallèles.

$$\mathbf{M} \neq 0$$

Ecrantage magnétique



Ecrantage ($B=0$ à l'intérieur de la «boîte»):

Les dipôles magnétiques dans le matériau sont orientés de telle manière qu'ils produisent un champ de grandeur égale mais de sens opposé par rapport au champ externe.

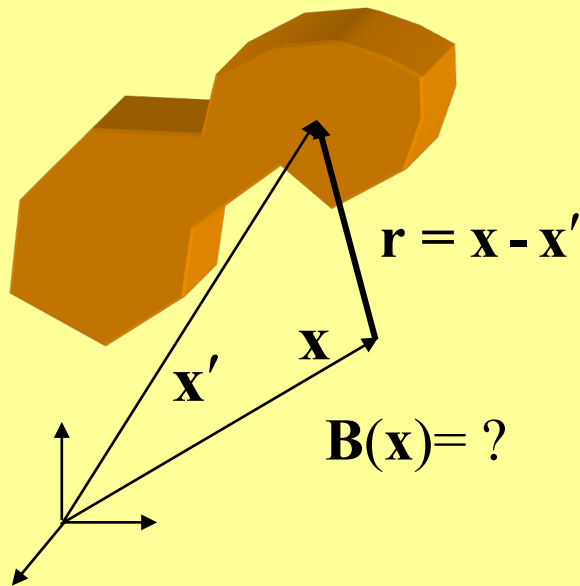
Le champ magnétique total à l'intérieur de la boîte est nul.

Un possible matériau: «mu-métal» (alliages avec $\sim 80\%$ Ni): $\mu_r \sim 100000$

Champ magnétique créé par un objet magnétisé

Problème:

A partir de $\mathbf{M}(\mathbf{x})$,
obtenir $\mathbf{B}(\mathbf{x})$

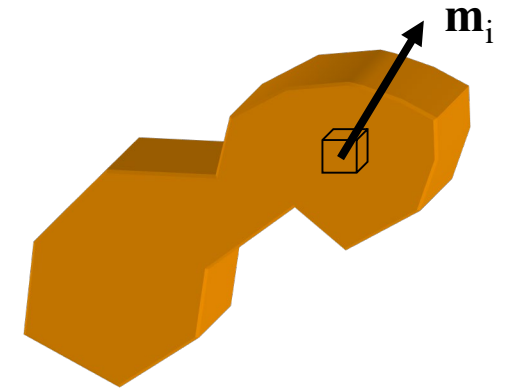


1. Méthode des «dipôle magnétiques»

$\mathbf{B}$ d'un dipôle magnétique $\mathbf{m}_i$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_i) \hat{\mathbf{r}}_i - \mathbf{m}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r}|^3} dV$$



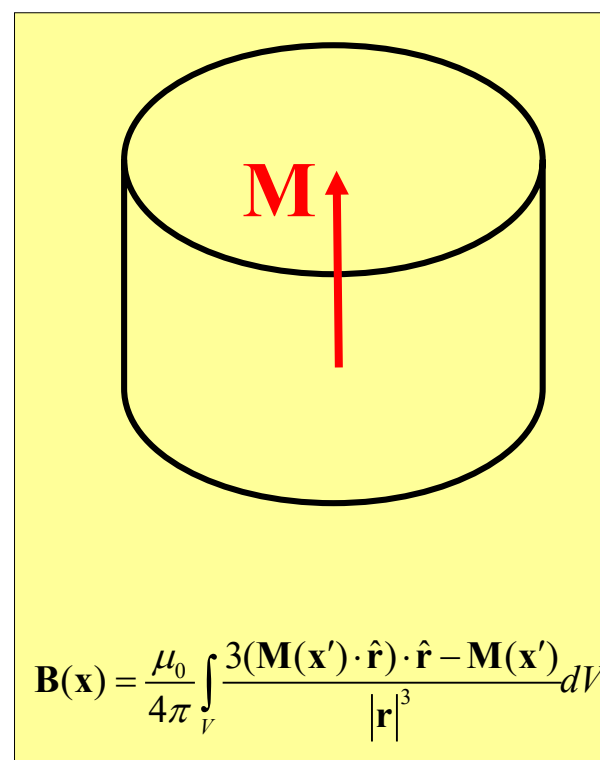
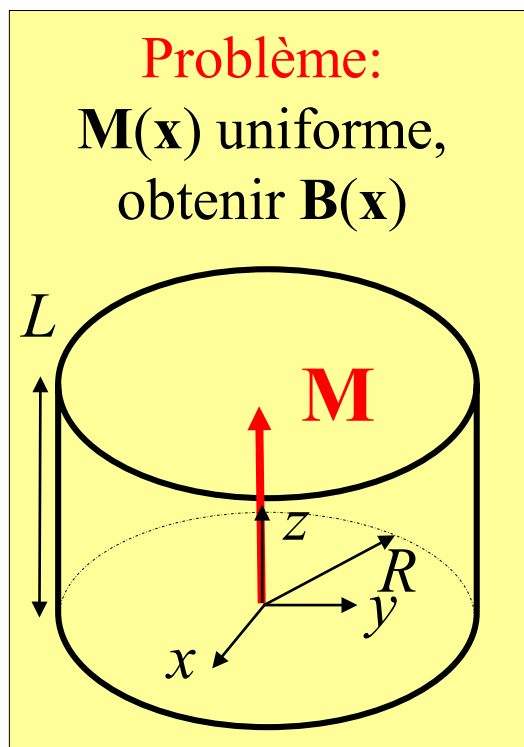
2. Méthode des «courants de surface lié»

CURIOSITY

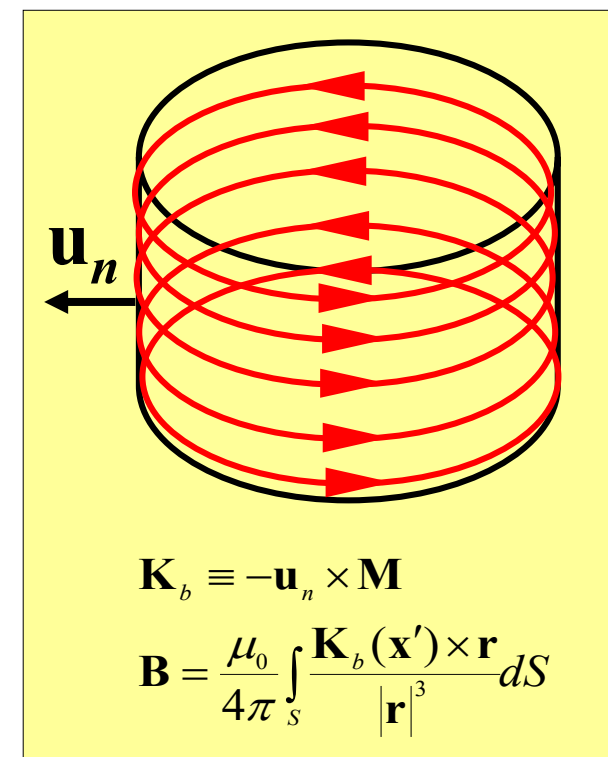
$$\mathbf{K}_b \equiv -\mathbf{u}_n \times \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dS$$

Exemple: cylindre uniformément magnétisé



Méthode 1



Méthode 2

Pour $z \gg R, L$ et $\mathbf{r} \cong (0, 0, z)$

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{3(\mathbf{M}(\mathbf{x}') \cdot \hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{r}|^3} dV \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{2Mz^2 \hat{\mathbf{z}}}{|z|^5} dV \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{z^3} M \pi R^2 L \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{MR^2 L}{z^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{z^3}$$

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{x}') \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} dS \cong \frac{\mu_0 I_b R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{z^3}$$

Rappel sur «force» et «couple» sur le dipôle électrique et le dipôle magnétique

Les équations des **forces** et des **couples**
sont toutes dérivée à partir de la **force de Lorentz**
(la force électromagnétique)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{F} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \\ \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{N} = \int_V (\mathbf{r} \times \rho\mathbf{E} + \mathbf{r} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})) dV \\ \mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \\ \mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \end{cases}$$

Note: (voir Z 96, Z 373, P 478, P 538, et slides précédentes)

L'expression "exacte" (i.e., toujours valable) de la force sur un dipole électrique est $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$
mais pour $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ et $\mathbf{p}$ indépendant de la position: $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$

L'expression "exacte" (i.e., toujours valable) de la force sur un dipole magnétique est $\mathbf{F} = m_k \nabla B_k$
mais pour $\mathbf{m}$ indépendant de la position: $\mathbf{F} = m_k \nabla B_k = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$

pour $\mathbf{m}$ indépendant de la position et $\nabla \times \mathbf{B} = 0$: $\mathbf{F} = m_k \nabla B_k = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

Force sur un objet magnétique dans un champ $\mathbf{B}$

Si $\mathbf{B}$ ne varie pas trop vite sur le volume de objet magnétique:

$$B_i(\mathbf{x}) = B_i(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla B_i(0) \quad (i = x, y, z)$$

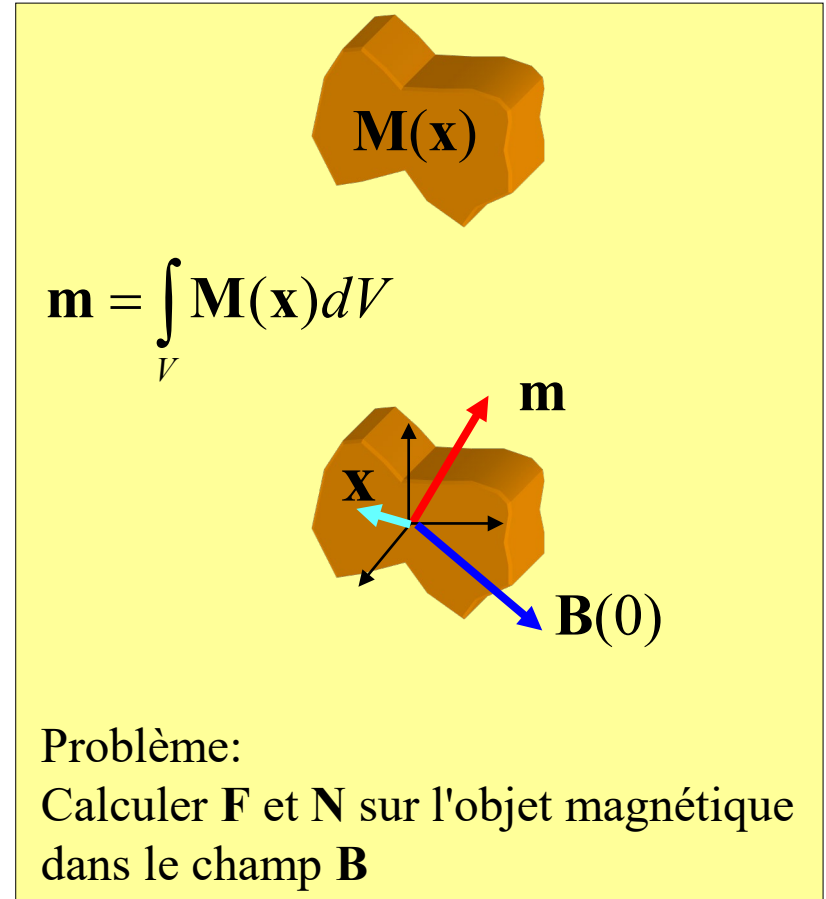
où $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ est le champ appliqué de l'extérieur

Avec cette hypothèse, nous pouvons démontrer que:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{Force}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \text{Couple}$$

$$U_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad \text{Energie potentielle}$$



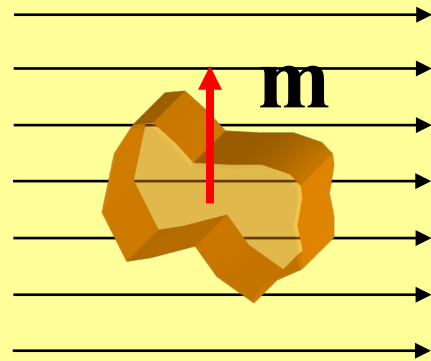
$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Force

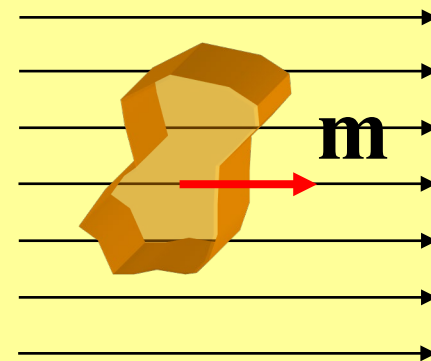
Couple

Champ magnétique uniforme

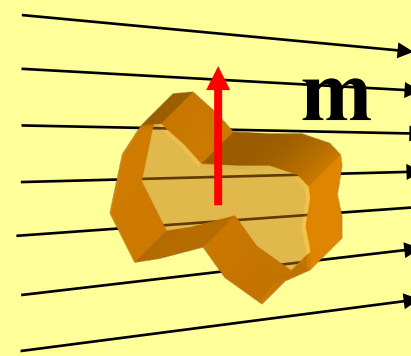


$\mathbf{F} = 0$ (pas de déplacement)

$\mathbf{N} \neq 0$ (rotation)

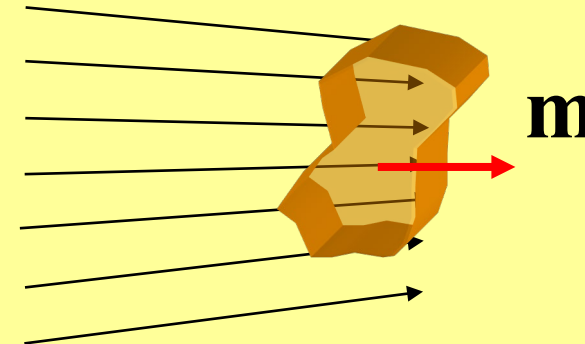


Champ magnétique non-uniforme



$\mathbf{F} \neq 0$ (déplacement)

$\mathbf{N} \neq 0$ (rotation)



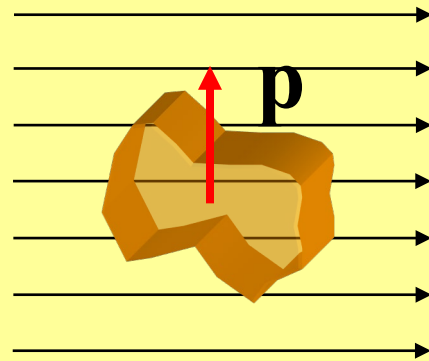
$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Force

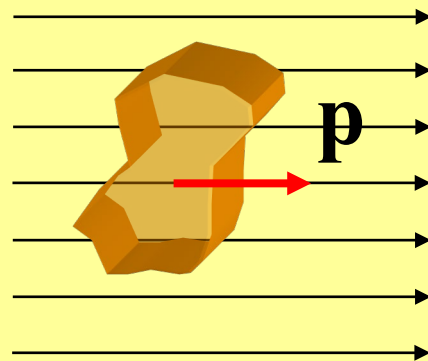
Couple

Champ électrique uniforme

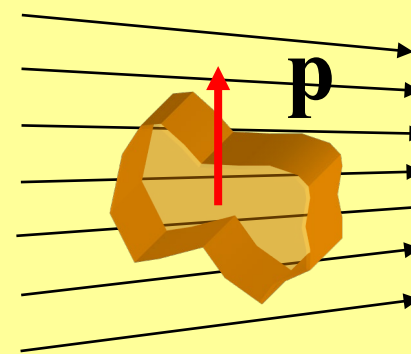


$\mathbf{F} = 0$ (pas de déplacement)

$\mathbf{N} \neq 0$ (rotation)

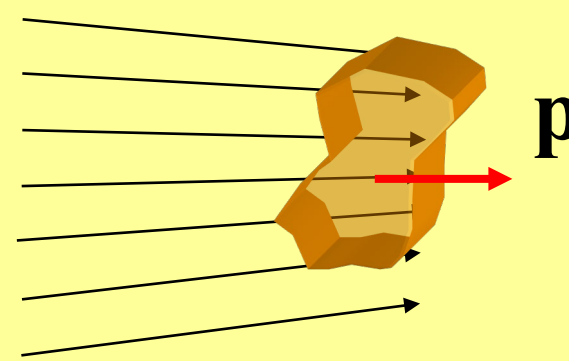


Champ électrique non-uniforme

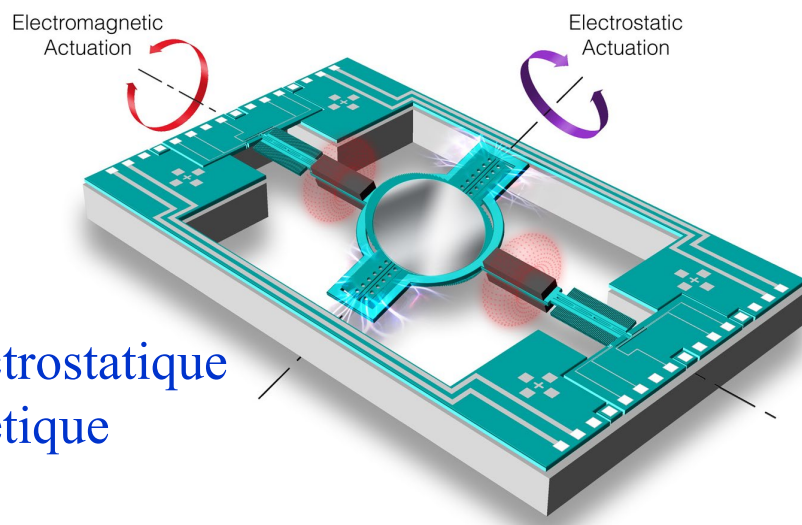


$\mathbf{F} \neq 0$ (déplacement)

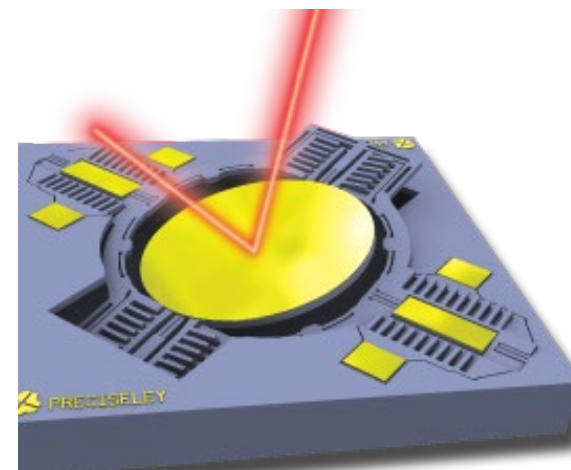
$\mathbf{N} \neq 0$ (rotation)



Applications «microtechnique» des forces et couples électro/magnéto statiques

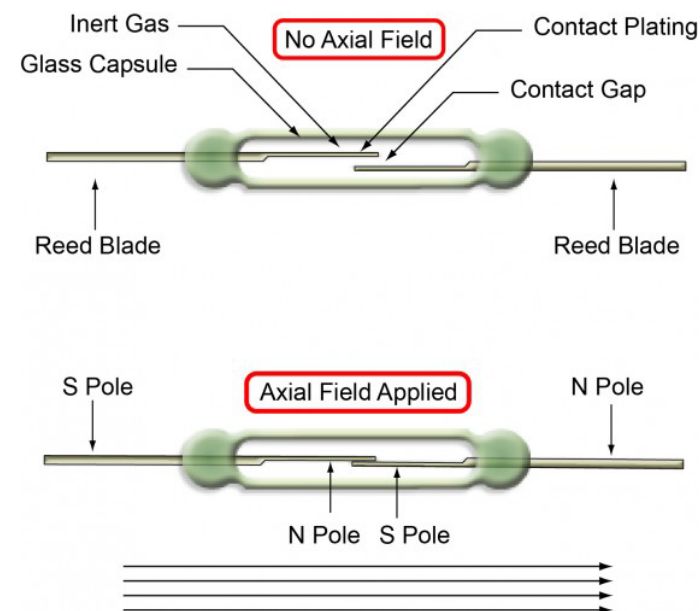
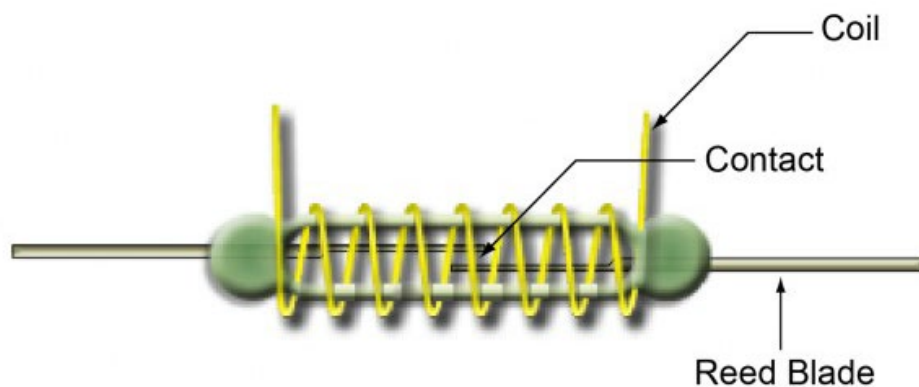


Actionneur électrostatique et électromagnétique

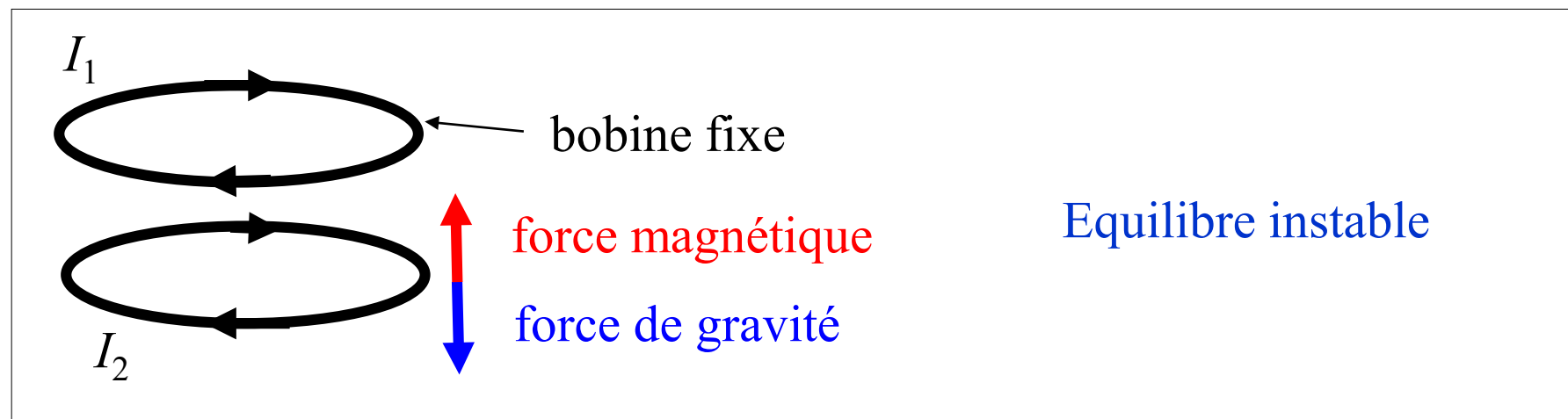
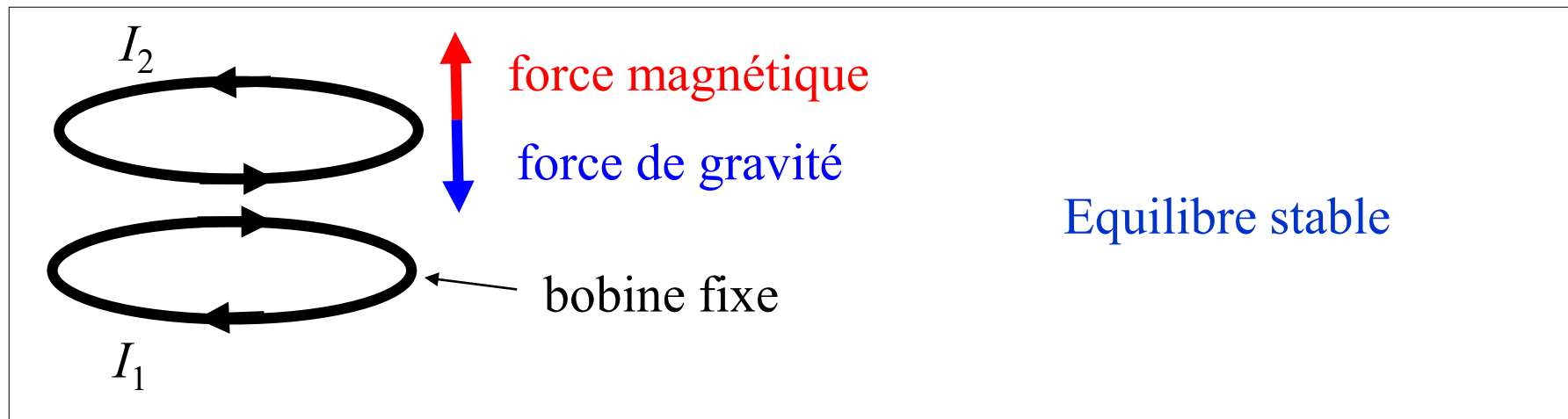


Actionneur électrostatique

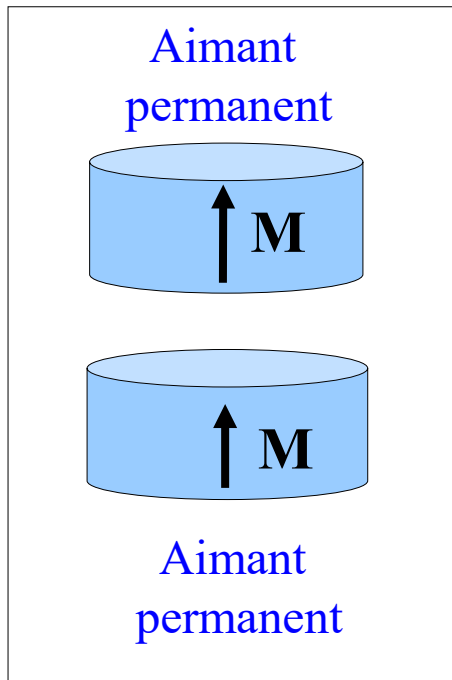
Actionneur magnétostatique



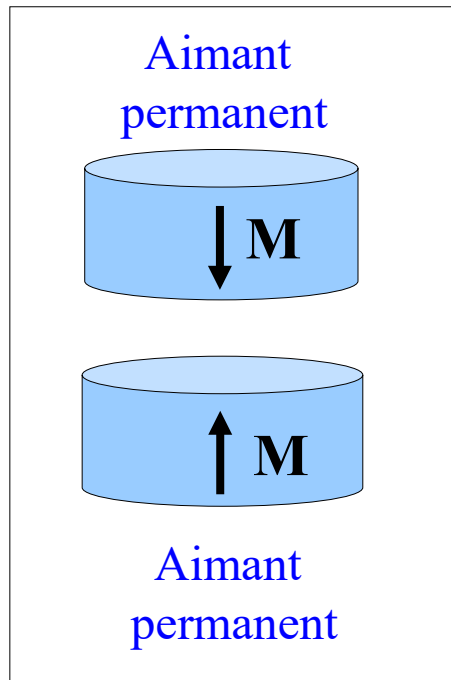
Lévitation magnétique d'une boucle avec courant



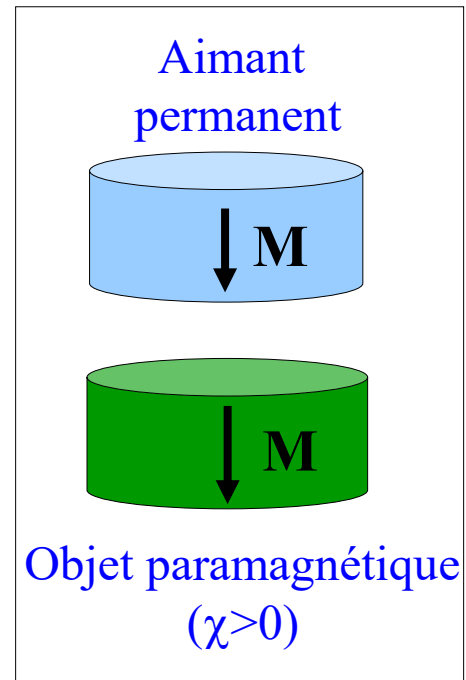
Levitation magnétique



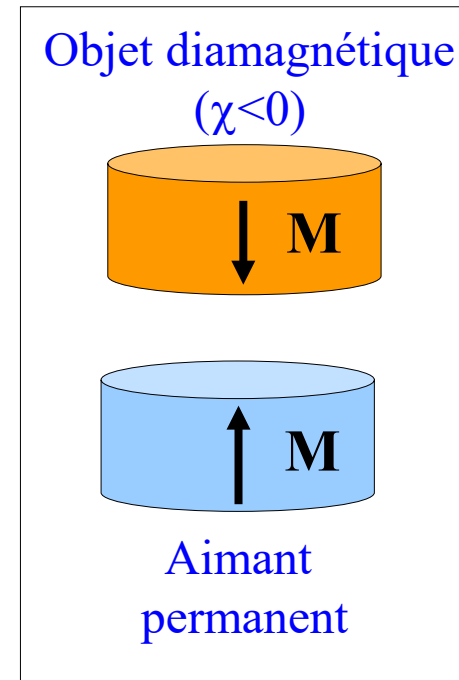
Non-équilibre



Equilibre «presque stable»
(rotation)



Non-équilibre



Equilibre «presque stable»
(rotation)

Levitation (et propulsion) magnétique



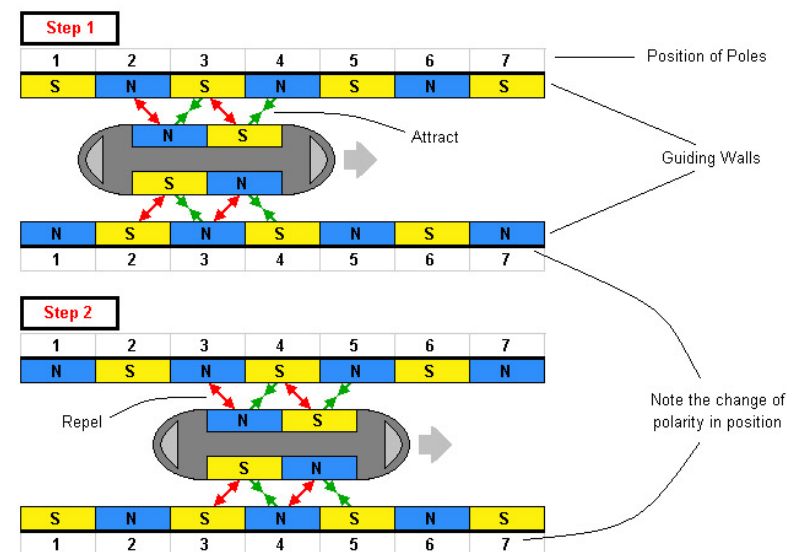
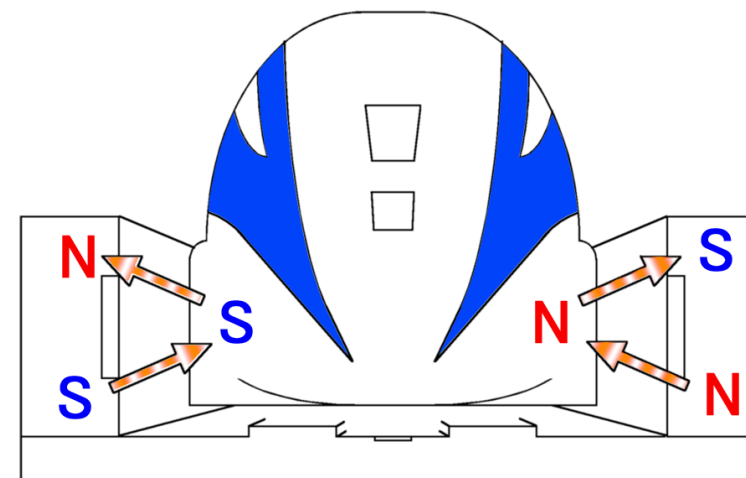
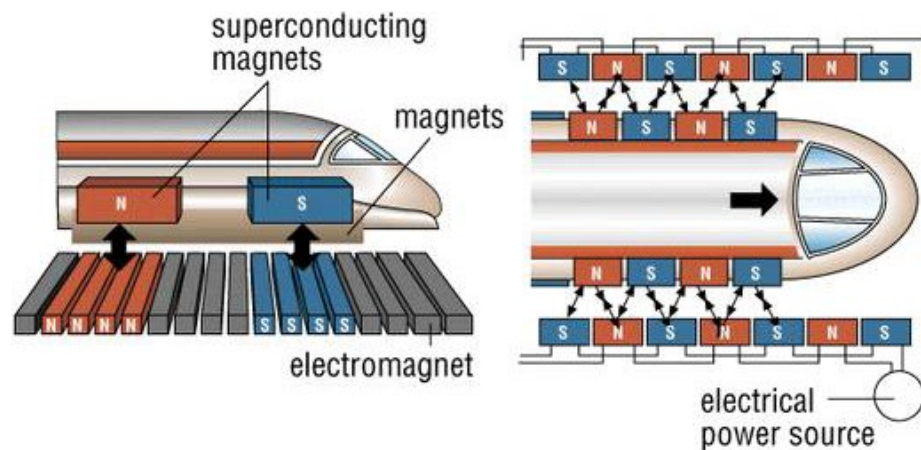
Maglev Train, Shanghai, China

Opening: 2004

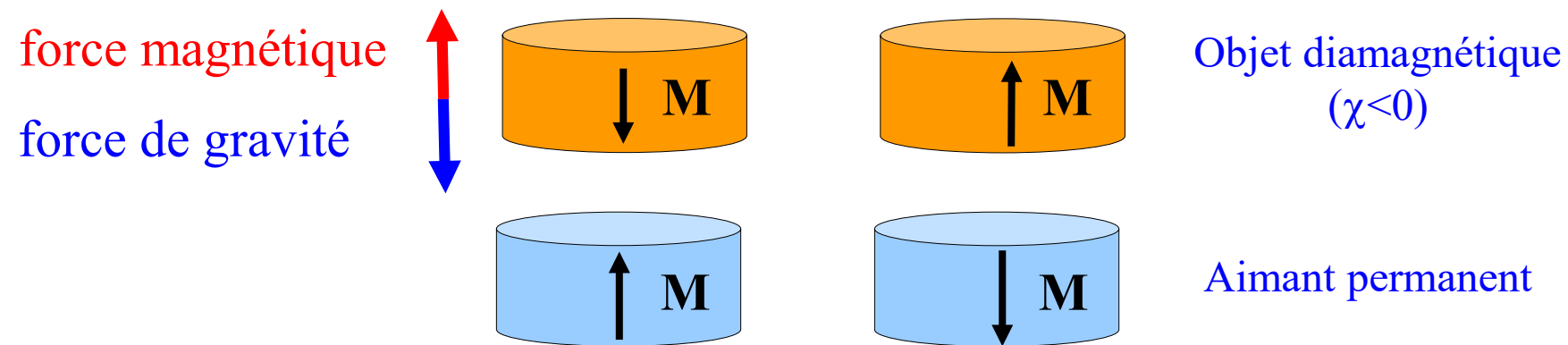
Speed: 430 km/h (operational), 501 km/h (max),

Length: 153 m, Width: 3.7 metres, Height: 4.2 m

Passengers: 574



Lévitation d'un objet diamagnétique



Energie potentielle

$$U_B \cong -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

$$U_G \cong mgh$$

Force

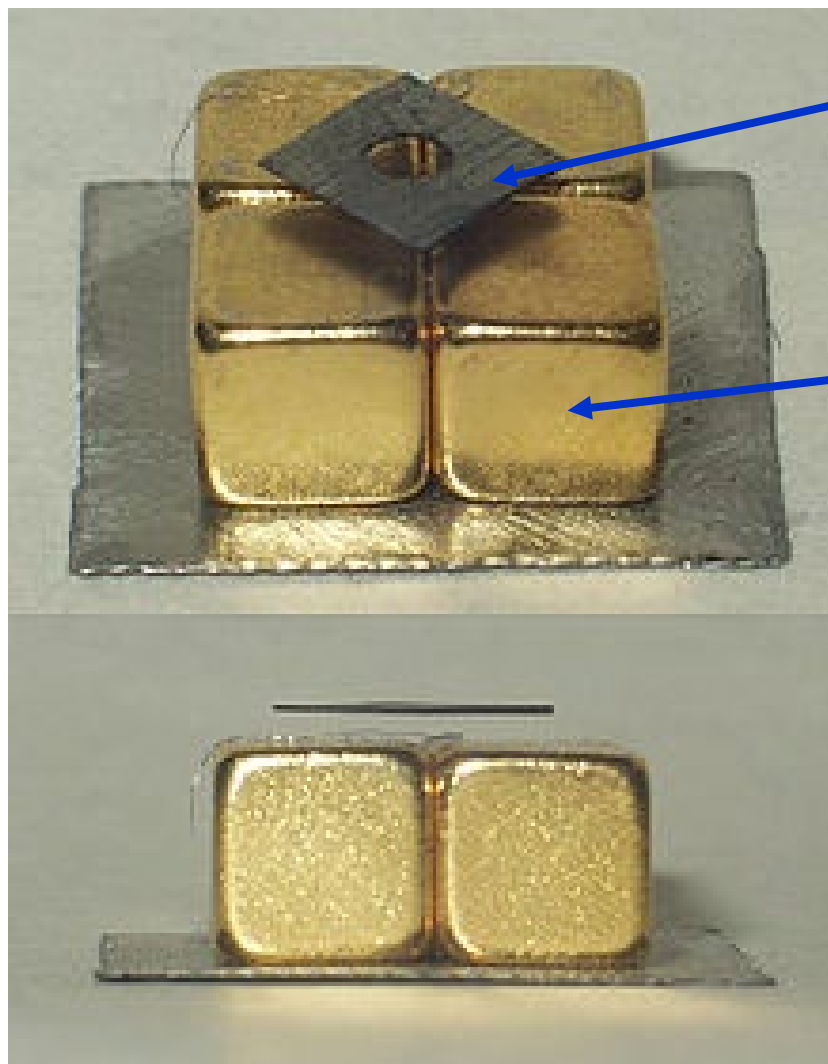
$$\mathbf{F}_B = -\nabla U_B \cong \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F}_G = -\nabla U_G = m\mathbf{g}$$

Position

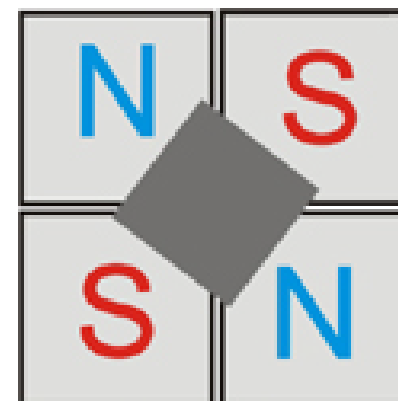
$$\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_G = 0$$

1. Lévitration à l'aide d'aimants permanents



Objet **diamagnétique**
(graphite pyrolytique (HOPG))

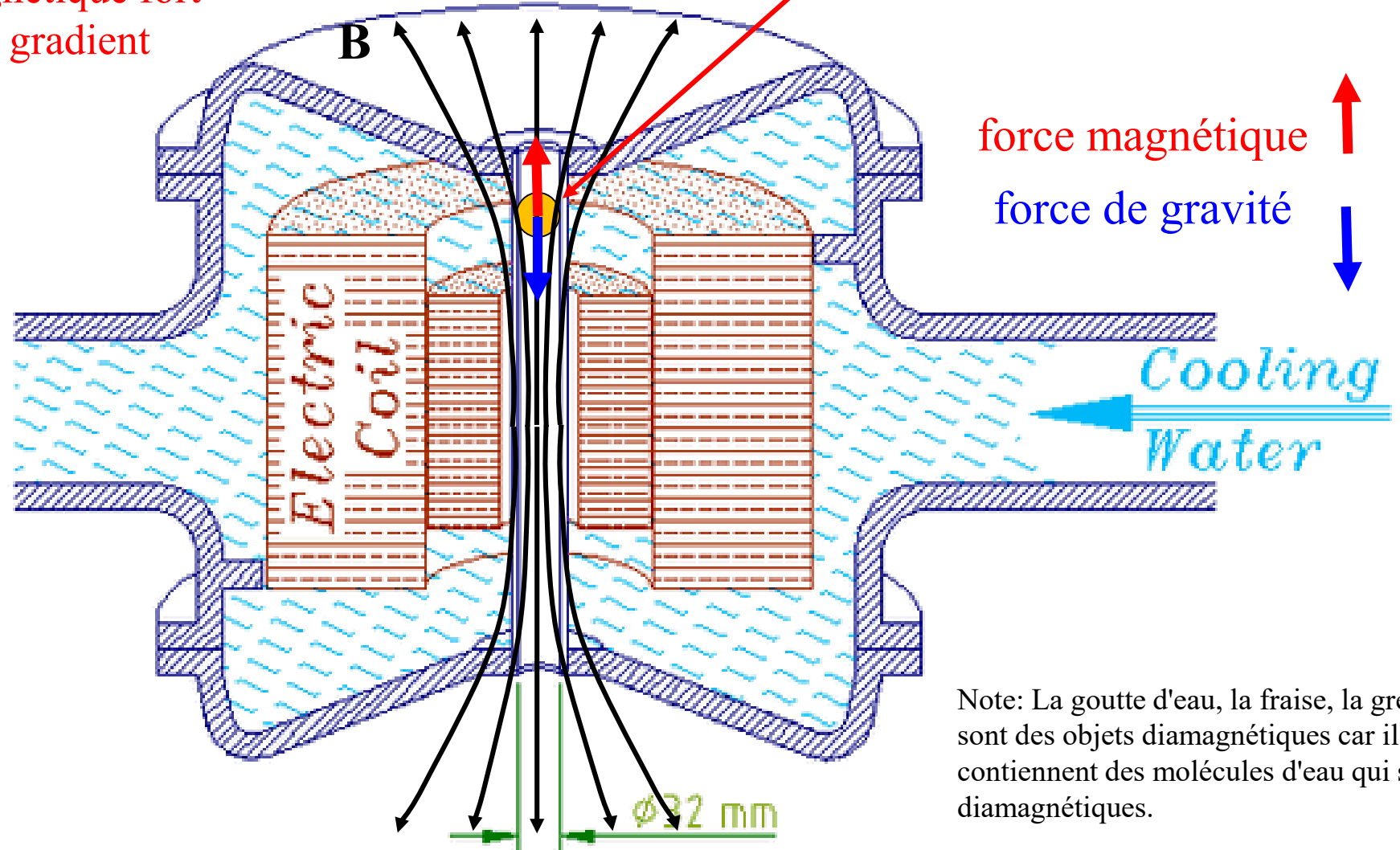
Aimant permanent
(NdFeB)



2. Lévitation à l'aide d'une bobine solénoïdale

Champ magnétique fort
avec un fort gradient

Objet **diamagnétique**
(goutte d'eau, fraise, grenouille, ...)



Note: La goutte d'eau, la fraise, la grenouille sont des objets diamagnétiques car ils contiennent des molécules d'eau qui sont diamagnétiques.

V : volume de l'objet (m^3)

m : masse de l'objet $m = \rho V$ (kg)

ρ : densité de l'objet (kg/m^3)

$$\mathbf{F}_B = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{m} \cong \mathbf{M}V \cong \chi_m \mathbf{H}V \cong \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} V$$

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_B \Leftrightarrow m\mathbf{g} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \Leftrightarrow$$

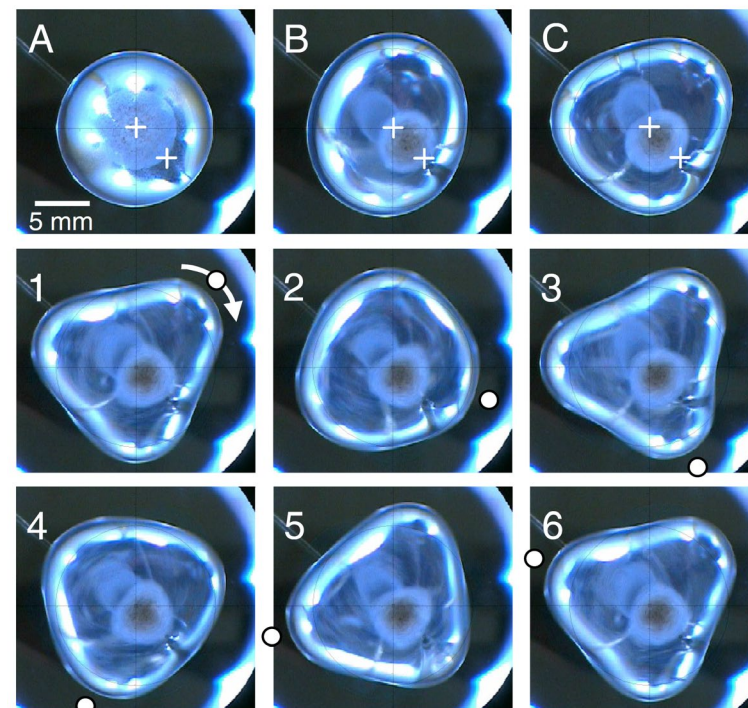
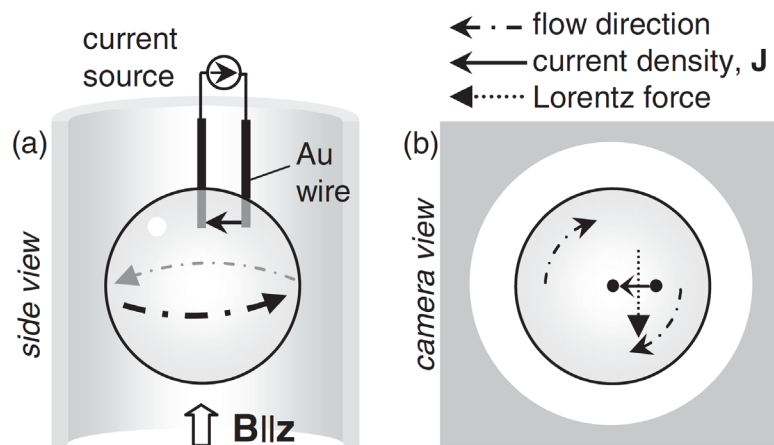
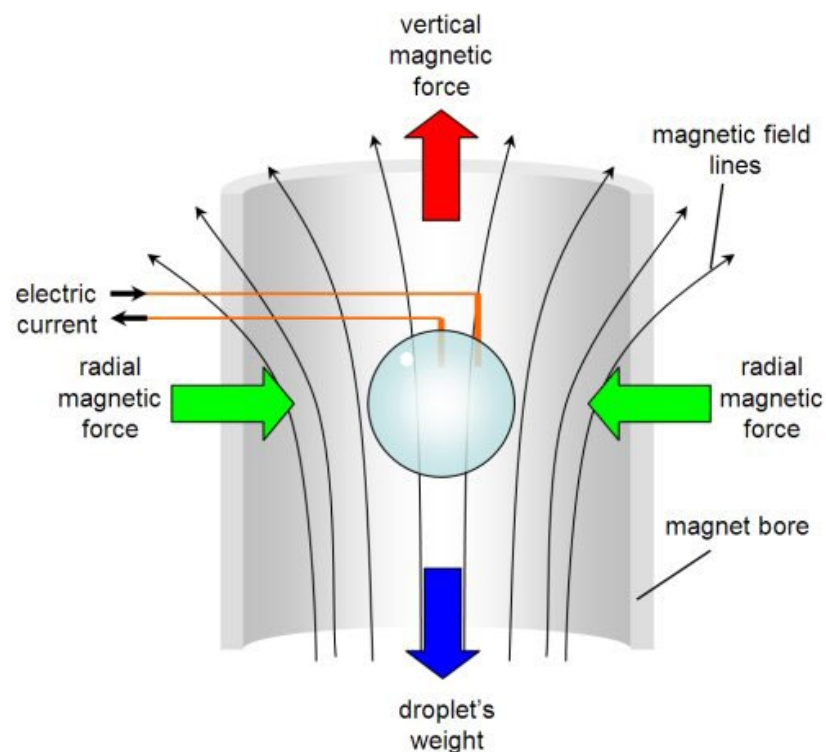
$$\rho V g = \chi_m \frac{B}{\mu_0} V \nabla B \Leftrightarrow \rho g = \chi_m \frac{B}{\mu_0} \nabla B$$







Lévitaiton et rotation d'un objet diamagnétique conducteur



A 1,5 ml de gouttelettes en lévitation.

(A) Non tournant.

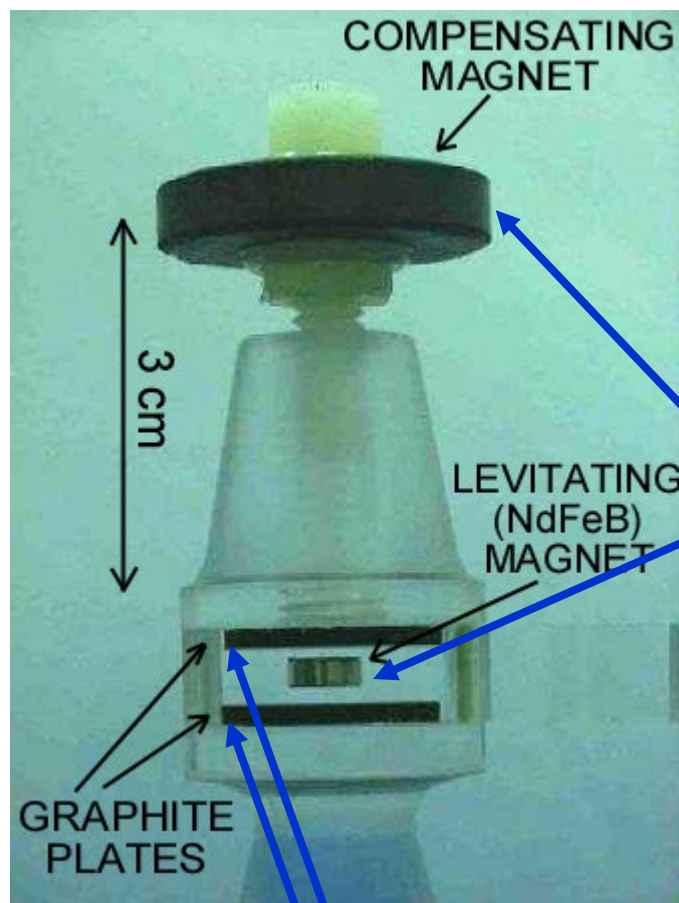
(B) Liquide tournant à 2 rps (gouttelettes ont un contour elliptique).

(C) Liquide tournant à 2,5 rps: l'équateur a la symétrie d'un triangle équilatéral. En (B), (C) le contour est pas tournant avec le fluide. Les croix indiquent les positions des électrodes.

(1)-(6) images vidéo consécutives, 40 ms d'intervalle; ici la forme triangulaire du contour est en rotation avec le fluide dans la direction de la flèche à 3.33 rps. Les cercles blancs suivent un coin.

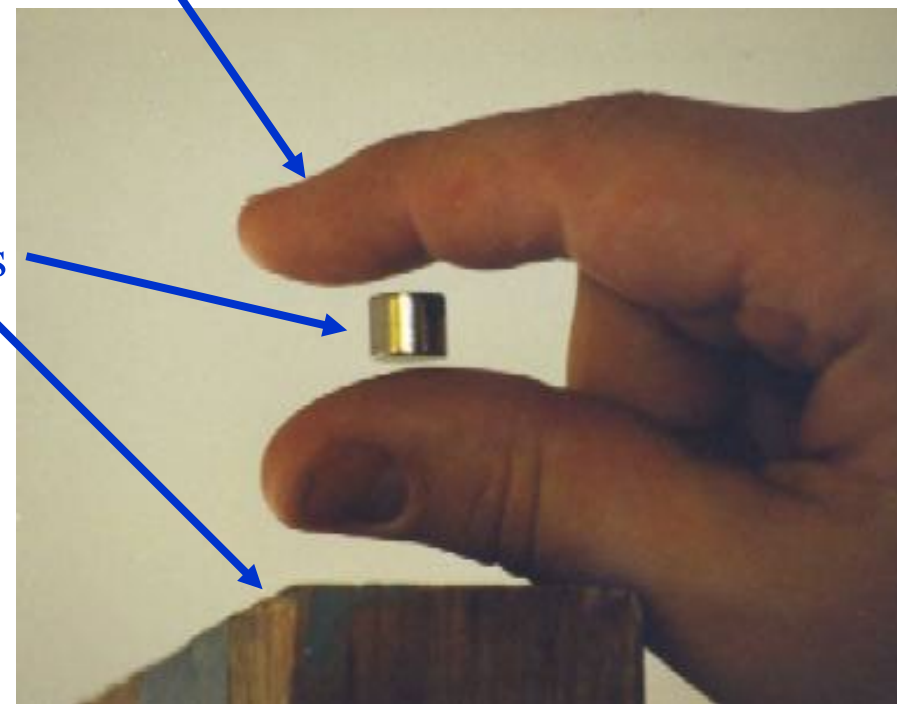
Lévitaiton d'un objet ferromagnétique (stabilisé par un matériau diamagnétique)

Note: Les doigts sont des objets diamagnétiques car ils contiennent des molécules d'eau qui sont diamagnétiques.



Aimant permanents

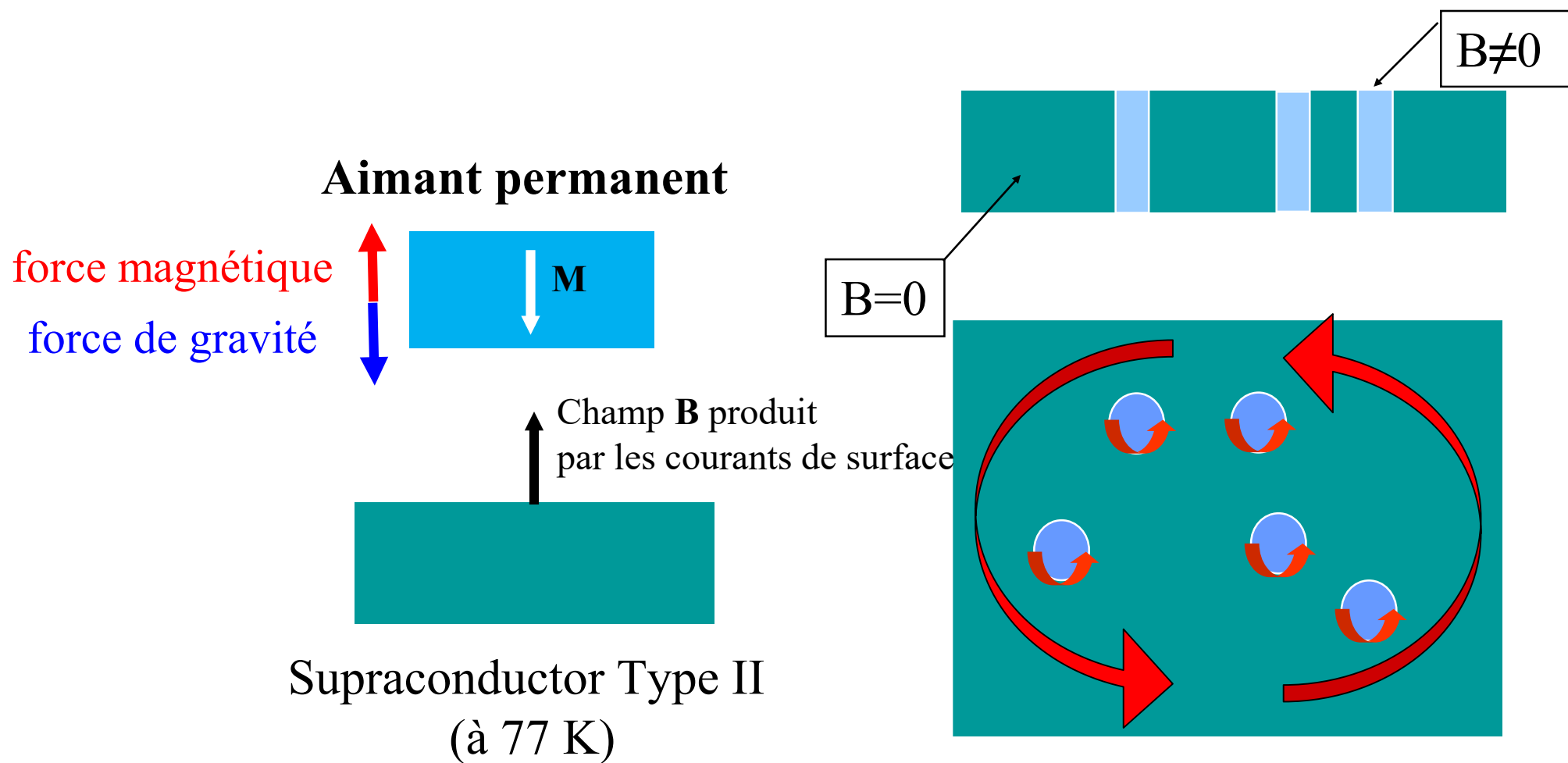
“Objets” diamagnétique (doigts)



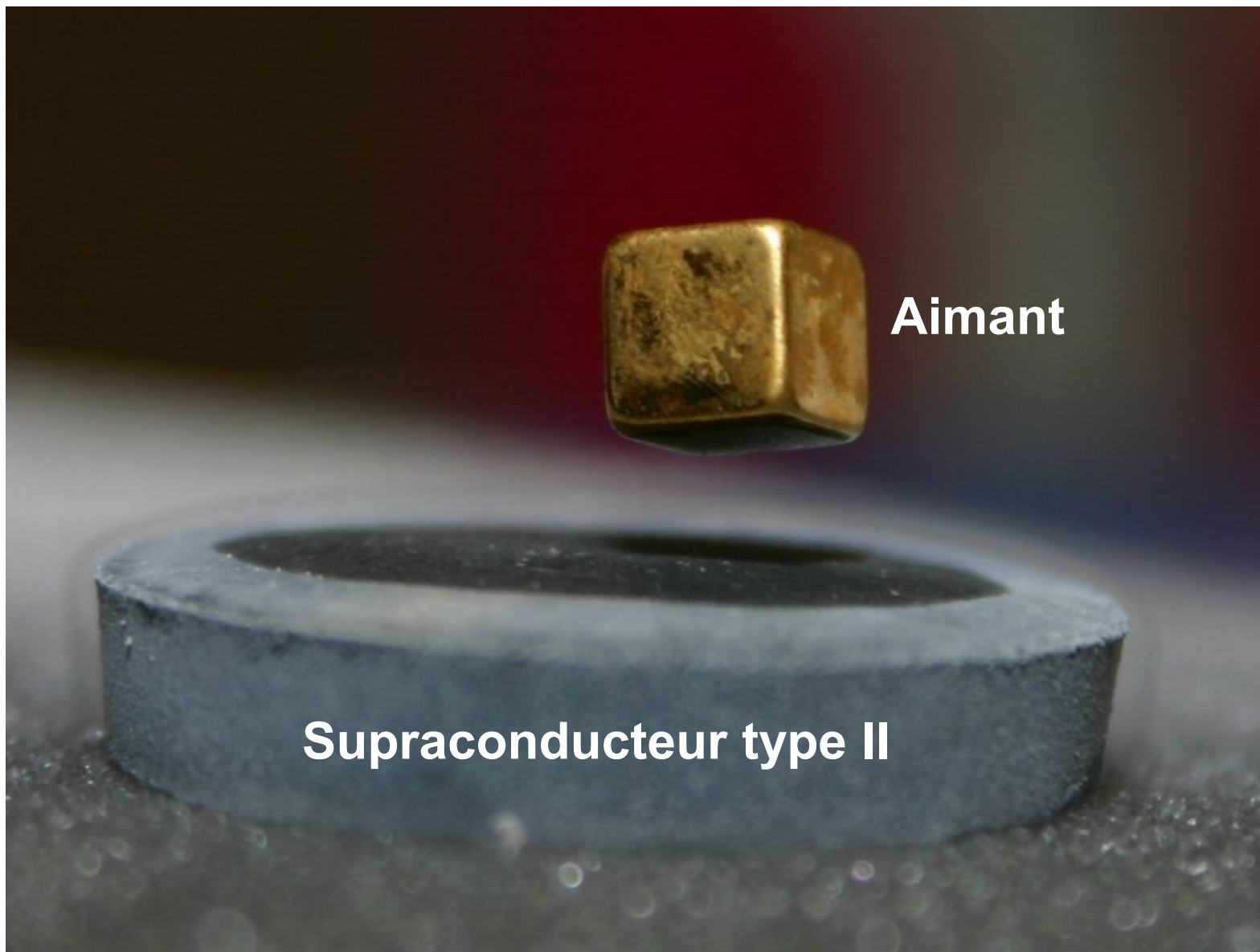
[Nature 400, 323-324 \(July 22 1999\)](#)

Objets diamagnétique

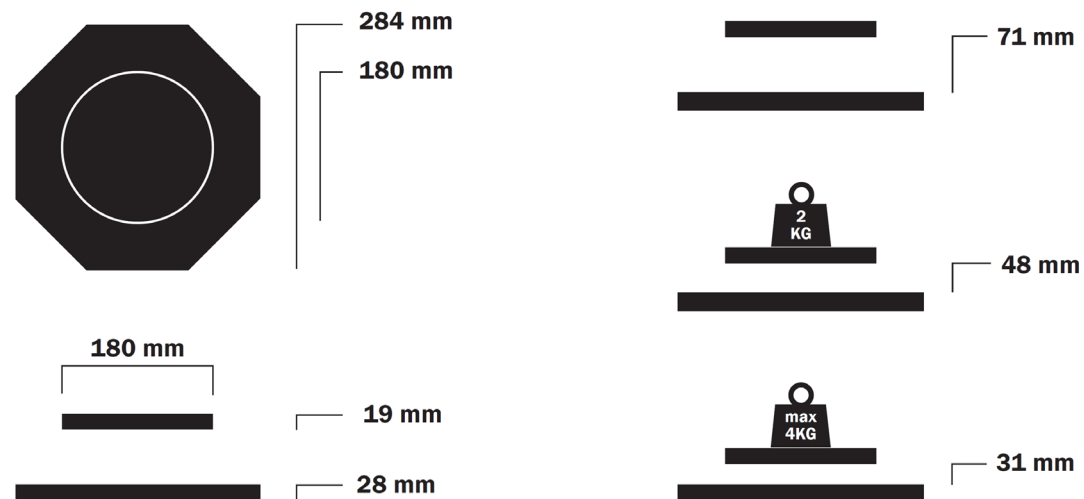
Lévitaiton d'un objet ferromagnétique (stabilisé par un supraconducteur de type II)



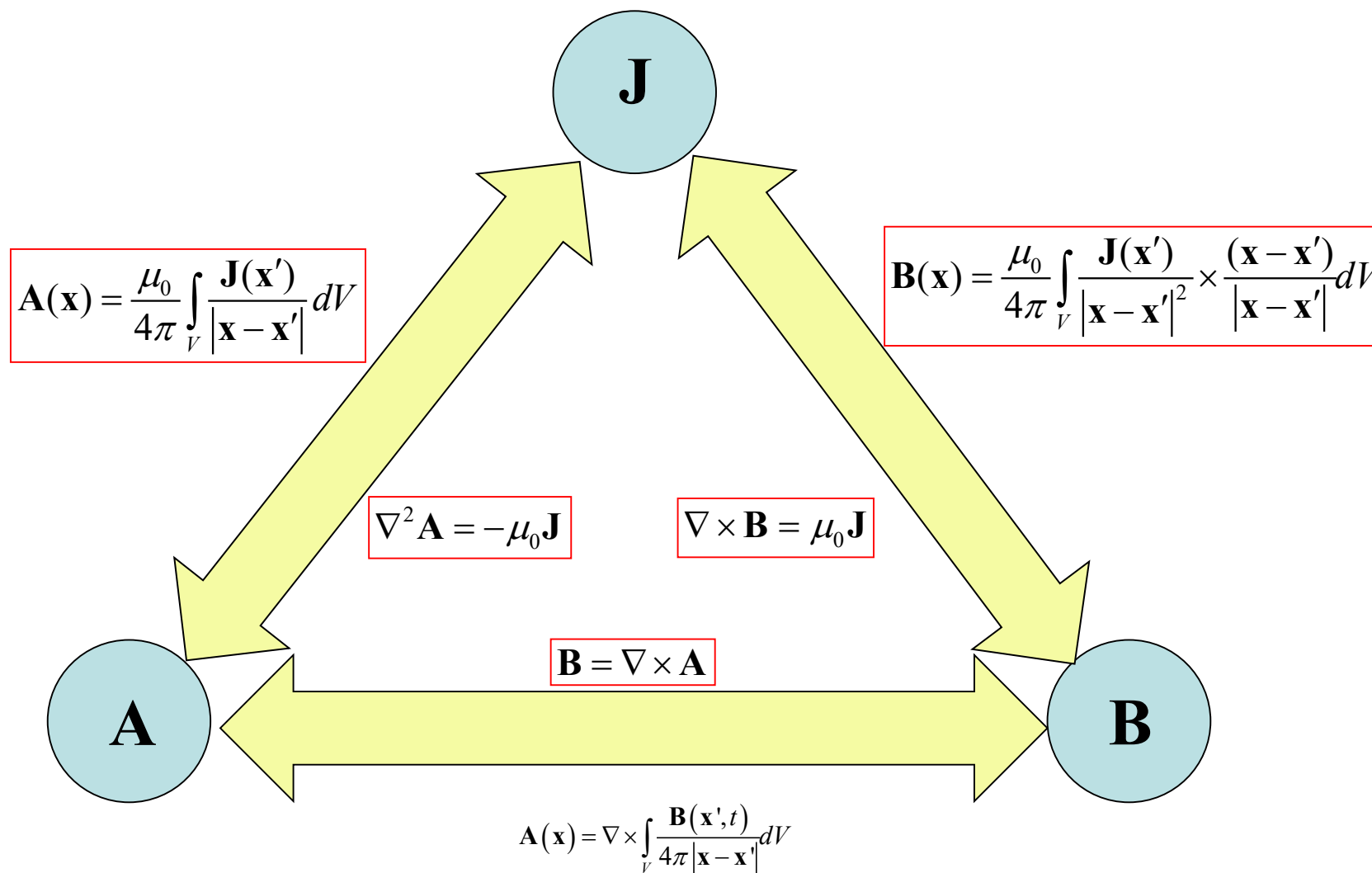
- Le champ B pénètre seulement dans les «tourbillons»
- Les courants de surface annulant le champ externe à l'intérieur du matériau (sauf dans les «tourbillons»)



Lévitaiton d'un objet ferromagnétique (stabilisé par des bobines avec courant)



Résumé de la magnétostatique



Analogies et différences électrostatique-magnétostatique

Champ **électrique** créé
par une distribution
de **charges statiques**

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \mathbf{r}\end{aligned}$$

Champ **magnétique** créé
par une distribution
de **courants stationnaires**

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

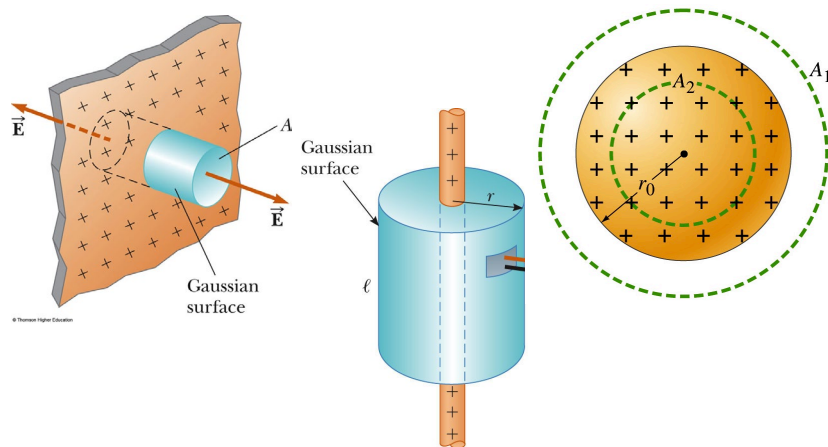
Champ $\mathbf{E}$ créé par une distribution de charges statiques

Pour les problèmes avec «symétries» on utilise aussi:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_V \rho dV$$

(Loi de Gauss)

Intégrale de surface



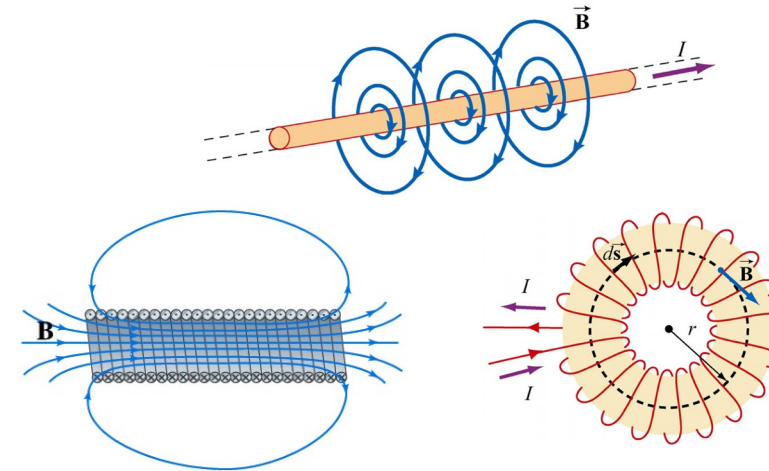
Champ $\mathbf{B}$ créé par une distribution de courants stationnaires

Pour les problèmes avec «symétries» on utilise aussi:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

(Loi d'Ampère)

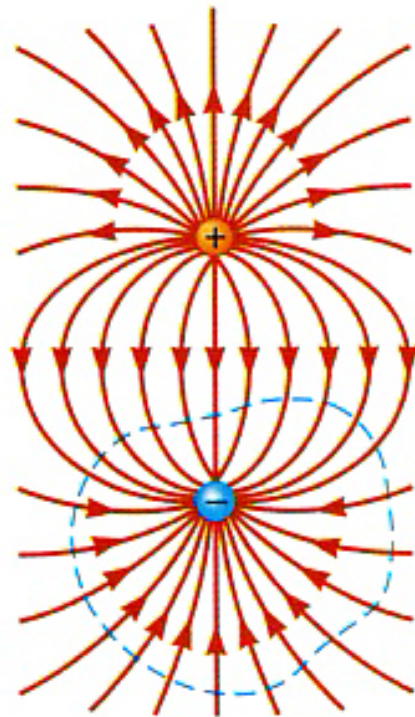
Intégrale de ligne



Le flux du champ **électrique**

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

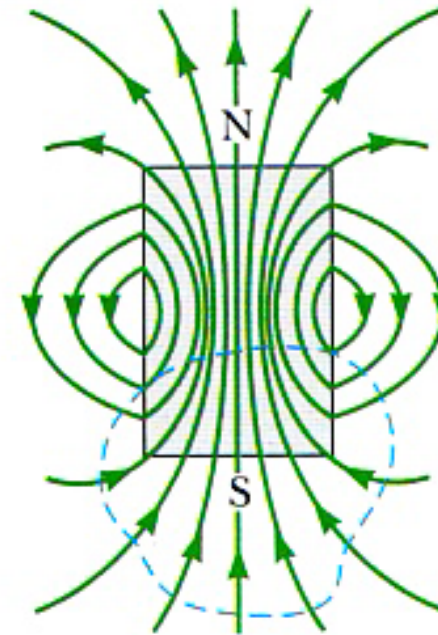
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



Le flux du champ **magnétique**

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

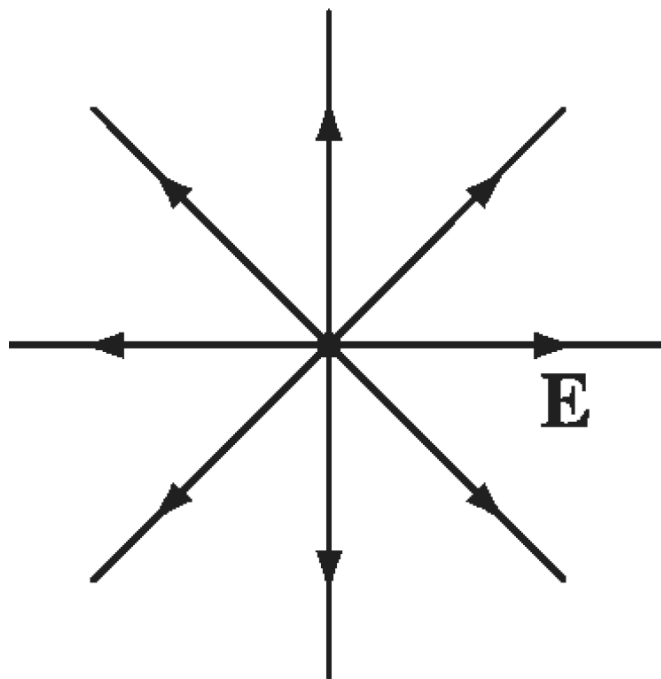


Interprétation:

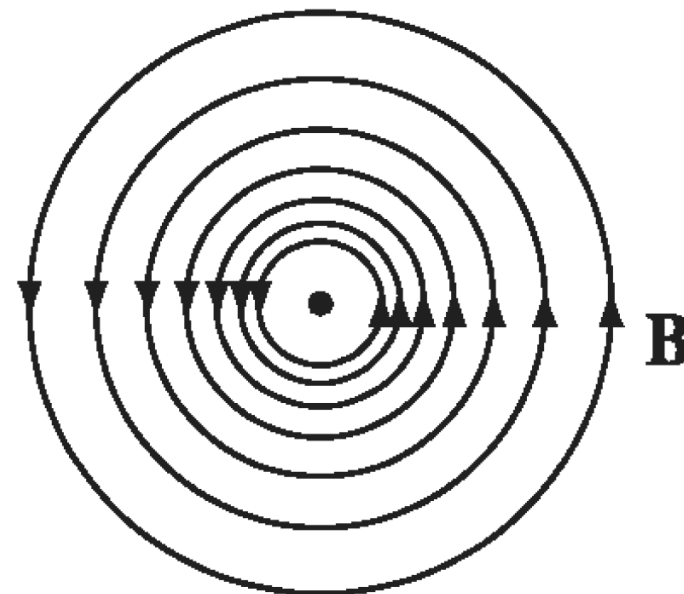
Absence de “charges magnétiques” (monopoles)

Les lignes du champ $\mathbf{B}$ sont toujours fermées
(pas de sources ni de puits)

Champ **électrique**
d'une charge ponctuelle



Champ **magnétique**
d'un long fil



Densité d'énergie
électrostatique

$$u_E = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

Densité d'énergie
magnétostatique

$$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

Le potentiel scalaire électrostatique

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V \Rightarrow \\ \nabla^2 V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Le potentiel vecteur magnétostatique

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0 \text{ (dans la jauge de Coulomb)} \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} \\ \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned}$$

Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \frac{1}{dV} \left(\sum_{n(\text{molécules})} \mathbf{p}_n \right) = \frac{\mathbf{p}}{dV}$$

$\mathbf{p}_n$: Dipôle électrique
de l'atome ou molécule n

Polarisation:
Dipôle électrique
par unité de volume

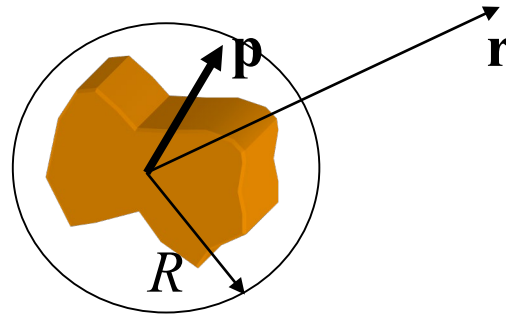
Aimantation

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{dV} \left(\sum_{n(\text{molécules})} \mathbf{m}_n \right) = \frac{\mathbf{m}}{dV}$$

$\mathbf{m}_n$: Dipôle magnétique
de l'atome ou molécule n

Aimantation:
Dipôle magnétique
par unité de volume

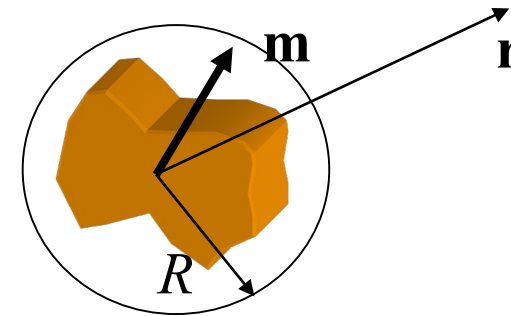
Champ électrique
créé par
un dipôle électrique



pour $r \gg R$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}$$

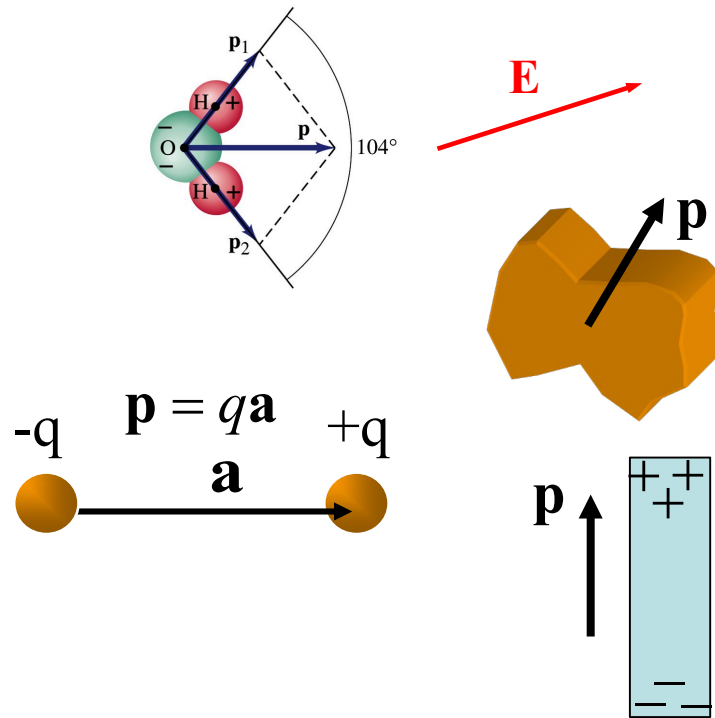
Champ magnétique
créé par
dipôle magnétique



pour $r \gg R$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Dipôle électrique dans un champ électrique

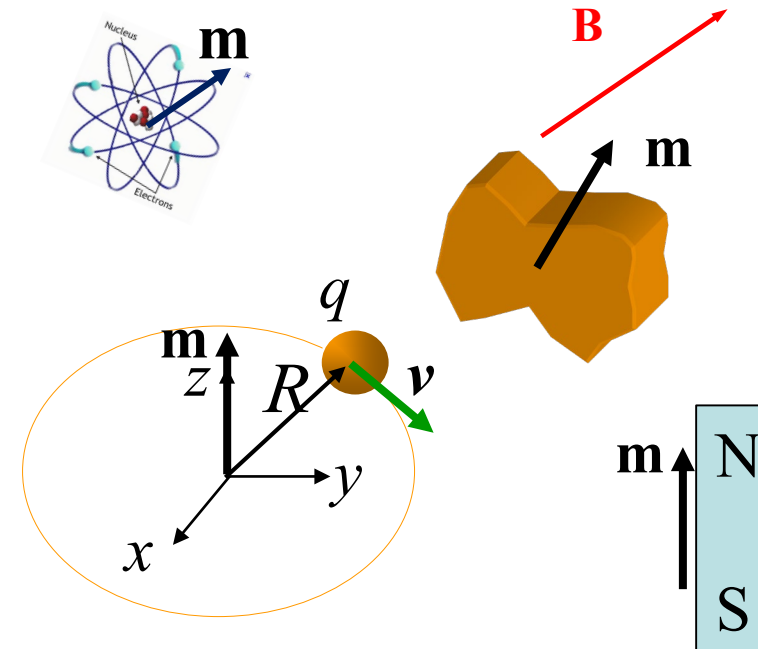


$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$U_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Dipôle magnétique dans un champ magnétique



$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$U_B = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$